Mecânica dos Fluidos

PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO E EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

R. Sobral

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

rodolfo.sobral@cefet-rj.br

CEFET/RJ

Programa do Curso - Avaliação 01

- **Fluidos e a hipótese do contínuo**
- **Estática dos fluidos**
- **Princípios de conservação e equações do movimento**
- **Similaridade dinâmica**

Teorema do Transporte

A seguir serão apresentados argumentos que demonstram que:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \Psi dV = \int_{\Omega_t}\left(\frac{D\Psi}{Dt} + \Psi \, div \, \mathbf{v}\right) dV = \int_{R}\left(\frac{D\Psi}{Dt} + \Psi \, div \, \mathbf{v}\right) dV$$

onde R é uma região fixa no espaço coincidente com Ω_t (região ocupada por um dado corpo no instante t dependente do tempo)

Teorema do Transporte

Sendo Ω_0 a região ocupada pelo corpo no instante $t = 0$, visto que cada ponto material possui sua própria linha de trajetória, então associa-se a cada ponto da região $\Omega_0 - (u, v, w)$ um ponto da região $\Omega_t - (x, y, z)$.

Portanto (u, v, w) pode ser tratado como sistema de coordenadas, visto que cada uma das variáveis x, y e z é função de u, v e w.

Teorema do Transporte

Assim, pode-se promover uma mudança de variáveis na integração tripla de um dado campo, como mostra

$$\iiint_{\Omega_t} \Psi \, dxdydz = \iiint_{\Omega_0} \Psi \, J \, dudvdw$$

Teorema do Transporte

Para cada instante,

$$J = det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Teorema do Transporte

Uma vez que o domínio Ω_0 é fixo (não varia com o tempo), escreve-se

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \Psi \, dV = \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t}(J\Psi)\, dV$$

sendo $\frac{\partial}{\partial t}(J\Psi)$ derivada parcial de domínio (u, v, w, t), para u, v e w fixados, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t}(J\Psi) = J\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi\frac{\partial J}{\partial t}$$

Em outras palavras, é uma derivada material, pois o ponto material é mantido fixo

Para Jacobiano,

$$J = det\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}-\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}$$

A derivada temporal do Jacobiano fica,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) \\
& + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) \\
& + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) \\
& - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) \\
& - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) \\
& - \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)
\end{aligned}
$$

Teorema do Transporte

Pela definição de velocidade,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial t} = & \frac{\partial v_x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial v_y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v_z}{\partial w} \\
& + \frac{\partial v_x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v_y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial v_z}{\partial u} \\
& + \frac{\partial v_x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial v_y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial v_z}{\partial v} \\
& - \frac{\partial v_x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial v_y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial v_z}{\partial v} \\
& - \frac{\partial v_x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v_y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial v_z}{\partial w} \\
& - \frac{\partial v_x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial v_y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v_z}{\partial u}
\end{aligned}
$$

Teorema do Transporte

Uma vez que é possível representar as componentes do campo de velocidades como funções de x, y e z, emprega-se a regra da cadeia,

$$\frac{\partial v_x}{\partial u} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

Logo a derivada do determinante é representada como,

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right]\left\{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right\}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J\, div\, \boldsymbol{v}$$

Teorema do Transporte

Dessa forma,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(J\Psi\right) = J\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \Psi\frac{\partial J}{\partial t} = J\left[\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \Psi\, div\boldsymbol{v}\right]$$

Teorema do Transporte

Voltando ao argumento apresentado no slide inicial, pode-se escrever então,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \Psi\, dV = \int_{\Omega_0} J\left[\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi\, div\boldsymbol{v}\right] dV$$

Levando-se em consideração ponto material fixo, tem-se que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \Psi\, dV = \int_{\Omega_t} \left[\frac{D\Psi}{Dt} + \Psi\, div\boldsymbol{v}\right] dV$$

No momento em que a configuração de referência coincidir com uma certa região R,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \Psi\, dV = \int_{R} \left[\frac{D\Psi}{Dt} + \Psi\, div\boldsymbol{v}\right] dV$$

CEFET/RJ

Ponderações

Vale chamar a atenção na diferença entre os significados físicos das integrais de superfície sobre $\partial\Omega_t$ e sobre ∂R, no instante em que $\partial\Omega_t \equiv \partial R$.

Por exemplo, o valor das quantidades $\int_{\partial R} \rho \mathbf{v}.\boldsymbol{n} dS$ e $\int_{\partial\Omega_t} \rho \mathbf{v}.\boldsymbol{n} dS$ num instante de em que $\partial\Omega_t \equiv \partial R$ é o mesmo, porém $\int_{\partial R} \rho \mathbf{v}.\boldsymbol{n} dS$ representa o fluxo de massa cruzando a fronteira da região fixa R, já $\int_{\partial\Omega_t} \rho \mathbf{v}.\boldsymbol{n} dS$ não representa o fluxo de massa cruzando a fronteira da região Ω_t.

A fronteira da região Ω_t é uma fronteira material e se desloca com a mesma velocidade do meio (corpo) contínuo, enquanto a fronteira R é fixa.

Teorema de Transporte - Campo escalar

Reescrevendo a equação anterior para um campo escalar f:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f dV = \int_R \left[\frac{\partial f}{\partial t} + div\left(f\boldsymbol{v}\right)\right] dV$$

Utilizando-se do Teorema da divergência de Gauss, reescrevemos a equação acima como

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f dV = \int_R \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{\partial R} f\left(\boldsymbol{vn}\right) dS$$

Aplicando finalmente o teorema de Leibnitz, tem-se para condição de coincidir a configuração atual com a região espacial de referência R

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_R f dV + \int_{\partial R} f\left(\boldsymbol{vn}\right) dS$$

Teorema de Transporte - Campo Vetorial

Reescrevendo a equação anterior para um campo vetorial $\boldsymbol{w}$:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \boldsymbol{w} dV = \int_{\Omega_t} \left[\frac{D\boldsymbol{w}}{Dt} + \boldsymbol{w} div \boldsymbol{v}\right] dV$$

Desenvolvendo a derivada material, agrupando-se os termos e aplicando as propriedades do cálculo tensorial, tem-se

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \boldsymbol{w} dV = \int_{R} \left[\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + div\left(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}\right)\right] dV$$

Aplicando o teorema da divergência de Gauss juntamente com o teorema de Leibnitz, tem-se para condição de coincidir a configuração atual com a região espacial de referência R

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \boldsymbol{w} dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_{R} \boldsymbol{w} dV + \int_{\partial R} \boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\right) dS$$

CEFET/RJ

Teorema de Transporte - Cálculo Tensorial

O teorema do transporte estabelece, no caso de campos regulares, que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \Psi\, dV = \int_{\Omega_t} \left[\frac{d}{dt}\left(\tilde{\Psi}\left(\boldsymbol{X}, t\right)\right) + \left(\tilde{\Psi}\left(\boldsymbol{X}, t\right)\right) tr\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}\boldsymbol{F}^{-1}\right)\right] dV$$

onde $\boldsymbol{F} = \tilde{F}\left(\boldsymbol{X}, t\right)$, $\frac{D}{Dt}$ representa a derivada material e Ω_t é a configuração do corpo no instante t (pode variar com o tempo t).

Equação da Continuidade

Axioma: a quantidade de matéria associada a uma dada parte de um corpo contínuo é invariante no tempo, em outras palavras

$$\frac{d}{dt} M_{\text{corpo}} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dV = 0$$

onde Ω_t denota a região ocupada pelo corpo contínuo no instante de tempo t.

Equação da Continuidade

O teorema do transporte estabelece que,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho dV = \int_{\Omega_t} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, div\boldsymbol{v}\right] dV$$

onde $\frac{D\rho}{Dt}$ representa a derivada material do campo de massa específica.

Equação da Continuidade - Forma Global

Portanto, o axioma da conservação da massa,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho dV = \int_{\Omega_t} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, div \boldsymbol{v} \right] dV = 0$$

Equação da Continuidade - Forma Local

Uma vez que a região Ω_t é arbitrária, conclui-se que,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, div \boldsymbol{v} = 0$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \left(\rho \boldsymbol{v} \right) = 0$$

visto que,

$$div \left(\rho \boldsymbol{v} \right) = \rho div \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} grad \, \rho$$

Tensor Tensão de Cauchy

Na mecânica dos corpos contínuos, temos dois tipos de forças, forças de corpo e de superfície.

- Forças de Corpo $\rightarrow$ atuam sobre todos os pontos materiais do corpo;
- Forças de Superfície de Contato $\rightarrow$ atuam sobre a fronteira do corpo.

Tensor Tensão de Cauchy

Sendo $\boldsymbol{g}$ o vetor aceleração da gravidade, a força de corpo atuando sobre a região Ω_t será,

$$\boldsymbol{F}_{\text{corpo}} = \int_{\Omega_t} \rho \boldsymbol{g} dV$$

Sendo a tensão representada por $\boldsymbol{t}$, a força de superfície exercida sobre S, para $S \subseteq \partial\Omega_t$,

$$\boldsymbol{F}_{\text{contato}} = \int_{S} \boldsymbol{t} dS$$

Vale ressaltar que $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}$

Quantidade de Movimento Linear

O primeiro axioma de Euler estabelece que a taxa de variação no tempo da quantidade de movimento linear de um corpo, referente a um referencial fixo, é igual a soma das forças externas atuando sobre esse corpo.

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho \boldsymbol{v} dV = \sum \boldsymbol{F}_{\text{externas}}$$

ou

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho \boldsymbol{v} dV = \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{t} dS + \int_{\Omega_t} \rho \boldsymbol{g} dV = \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} dS + \int_{\Omega_t} \rho \boldsymbol{g} dV$$

Quantidade de Movimento Linear

O teorema do transporte estabelece que,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho \boldsymbol{v} dV = \int_{\Omega_t} \left[\frac{D\left(\rho \boldsymbol{v}\right)}{Dt} + \left(\rho \boldsymbol{v}\right)\, div \boldsymbol{v} \right] dV$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho \boldsymbol{v} dV = \int_{\Omega_t} \left[\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} + \boldsymbol{v}\frac{D\rho}{Dt} + \left(\rho \boldsymbol{v}\right)\, div \boldsymbol{v} \right] dV$$

Quantidade de Movimento Linear

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho \boldsymbol{v} dV = \int_{\Omega_t} \left[\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} + \boldsymbol{v}\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, div \boldsymbol{v}\right)\right] dV$$

Vide equação da continuidade $\int_{\Omega_t} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, div \boldsymbol{v}\right] dV = 0$, reescrevendo a QML, tem-se

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho \boldsymbol{v} dV = \int_{\Omega_t} \left[\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\right] dV$$

CEFET/RJ

Quantidade de Movimento Linear - Forma Global

Portanto, a equação global da quantidade de movimento linear fica

$$\int_{\Omega_t} \left[\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\right] dV = \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} dS + \int_{\Omega_t} \rho \boldsymbol{g} dV$$

empregando teorema da divergência

$$\int_{\Omega_t} \left[\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\right] dV = \int_{\Omega_t} div\boldsymbol{T} dV + \int_{\Omega_t} \rho \boldsymbol{g} dV$$

Quantidade de Movimento Linear - Forma Local

Uma vez que a região Ω_t é arbitrária, conclui-se que,

$$\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = div\boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{g}$$

ou

$$\rho \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (grad\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} \right] = div\boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{g}$$

Quantidade de Movimento Linear - Forma Local

No sistema de coordenadas cartesiano retangular,

$$\rho\left[\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right]=\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+\rho g_x$$

$$\rho\left[\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right]=\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+\rho g_y$$

$$\rho\left[\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]=\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+\rho g_z$$

CEFET/RJ

Quantidade de Movimento Angular

O segundo axioma de Euler estabelece que a taxa de variação no tempo da quantidade de movimento angular de um corpo, referente a um referencial fixo, é igual a soma dos torques atuando sobre esse corpo.

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{v} dV = \sum \boldsymbol{M}_{\text{externos}}$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \boldsymbol{r} \times (\rho \boldsymbol{v})\, dV &= \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{t} dS + \int_{\Omega_t} \boldsymbol{r} \times (\rho \boldsymbol{g})\, dV + \boldsymbol{T}_{\text{eixo}} \\ &= \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\, dS + \int_{\Omega_t} \boldsymbol{r} \times (\rho \boldsymbol{g})\, dV + \boldsymbol{T}_{\text{eixo}}\end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{r}$ representa o vetor posição posição em relação a algum ponto fixo ($\boldsymbol{r}$ é o braço da alavanca, podendo sem perda de generalidade ser o próprio vetor posição $\boldsymbol{x}$, ao considerar a origem no ponto fixo em questão)

Quantidade de Movimento Angular

O teorema do transporte estabelece que,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\left(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}\right) dV = \int_{\Omega_t}\left[\frac{D\left[\rho\left(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}\right)\right]}{Dt} + \left[\rho\left(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}\right)\right]\, div\boldsymbol{v}\right] dV$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\left(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}\right) dV = \int_{\Omega_t}\left[\rho\frac{D\left(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}\right)}{Dt} + \left(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}\right)\frac{D\rho}{Dt} + \left(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}\right)\rho\, div\boldsymbol{v}\right] dV$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\,(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})\,dV = \int_{\Omega_t}\left[\rho\frac{D\,(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})}{Dt} + (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,div\,\boldsymbol{v}\right)\right] dV$$

Vide equação da continuidade $\int_{\Omega_t}\left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,div\,\boldsymbol{v}\right] dV = 0$, reescrevendo a QMA, tem-se

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\,(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})\,dV = \int_{\Omega_t}\left[\rho\frac{D\,(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})}{Dt}\right] dV$$

Quantidade de Movimento Angular

Uma vez que $\boldsymbol{x}$ é o vetor posição, reescreve-se

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\rho\,(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})\,dV=\int_{\Omega_t}\left[\rho\boldsymbol{x}\times\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\right]dV$$

Quantidade de Movimento Angular - Forma Global

Portanto, a equação global da quantidade de movimento angular fica

$$\int_{\Omega_t} \left[\rho \boldsymbol{x} \times \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} \right] dV = \int_{\partial \Omega_t} \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\, dS + \int_{\Omega_t} \boldsymbol{x} \times (\rho \boldsymbol{g})\, dV + \boldsymbol{T}_{\text{eixo}}$$

Primeira e Segunda Lei da Termodinâmica

As leis da termodinâmica já foram exaustivamente abordadas na disciplina antecedente ao presente curso.

Equação de Bernoulli

Define-se fluido ideal como um meio contínuo que, sob quaisquer circunstâncias, tem o tensor de Cauchy múltiplo do tensor identidade. Em outras palavras, para um fluido ideal,

$$\boldsymbol{T} = -p\mathbf{1}$$

Onde p é a pressão, inferindo tensão cisalhante sempre nula. A forma local da equação da quantidade de movimento linear é dada por (para qualquer meio contínuo)

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (grad\,\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}\right] = div\boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{g}$$

Equação de Bernoulli

Assim, para um fluido ideal, a equação anterior se reduz a

$$\rho \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (grad \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{v} \right] = -grad p + \rho \boldsymbol{g}$$

que é chamada equação de Euler.

Suponhamos agora um escoamento de fluido ideal em regime permanente (velocidade não dependendo explicitamente do tempo). Nesse caso, a equação de Euler pode ser escrita como

$$\rho\, (grad \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{v} = -grad p + \rho \boldsymbol{g}$$

Equação de Bernoulli

Se a massa específica depender apenas da pressão (podendo inclusive ser constante), a equação anterior pode ser representada por

$$(grad\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} = -grad\left(\int \frac{dp}{\rho}\right) + \boldsymbol{g}$$

Considerando o eixo "z" paralelo ao vetor aceleração da gravidade, de tal forma que

$$\boldsymbol{g}\,.\,\boldsymbol{k} = -||\boldsymbol{g}|| = -g = constante$$

Podendo representar o vetor aceleração da gravidade como

$$\boldsymbol{g} = -grad(gz)$$

CEFET/RJ

Equação de Bernoulli

Pela definição do operador rotacional, temos que

$$(rot\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v} = (grad\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} - (grad\boldsymbol{v})^T .\boldsymbol{v}$$

$$(grad\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} = (grad\boldsymbol{v})^T \boldsymbol{v} + (rot\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v}$$

Onde

$$(grad\boldsymbol{v})^T .\boldsymbol{v} = grad\left(\frac{\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}}{2}\right)$$

Assim a equação de Euler se reduz a

$$(rot\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v} = -grad\left(\frac{\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}}{2}\right) - grad\left(\int \frac{dp}{\rho}\right) - grad(gz)$$

Equação de Bernoulli

Ou seja,

$$(rot\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v} = -grad\left(\frac{\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + gz\right) = -grad\left(\frac{1}{2}||\boldsymbol{v}||^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz\right)$$

Assim levando-se em conta que

$$\left[(rot\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v}\right].\boldsymbol{v} = 0$$

Tem-se:

$$-grad\left(\frac{1}{2}||\boldsymbol{v}||^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz\right).\boldsymbol{v} = 0$$

Equação de Bernoulli

Caracterizando as linhas de corrente como curvas de nível das grandezas entre parênteses. Tem-se então a Equação de Bernoulli

$$\frac{1}{2}||\boldsymbol{v}||^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{constante sobre uma linha de corrente}$$

Para escoamentos irrotacionais (ou potenciais), teremos que em toda parte

$$rot\boldsymbol{v} = 0$$

Logo, a equação de Bernoulli vale para todo o escoamento

$$\frac{1}{2}||\boldsymbol{v}||^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{constante em todo o escoamento}$$

Equação de Bernoulli

Quando a massa específica for constante, tem-se

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho} + constante$$

Daí a equação de Bernoulli é expressa da forma (mais comumente encontrada na literatura)

$$\frac{1}{2}||\boldsymbol{v}||^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constante}$$

Perda de Carga em Tubos

Considerando o perfil de velocidades plenamente desenvolvido num duto circular reto, como mostra

$$v_z = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{p_L - p_0}{L} - \rho g_z\right)\left[1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}\right]$$

Perda de Carga em Tubos

As linhas de corrente para esse escoamento são retas paralelas ao eixo z. A energia mecânica num dado ponto (x_0, y_0, z_0) desse escoamento é dada por

$$e_{(x_0,y_0,z_0)} = \left(\frac{1}{2}v_z^2 + \frac{p}{\rho} + gz\right)_{(x_0,y_0,z_0)}$$

com $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$

Perda de Carga em Tubos

No ponto (x_0, y_0, z_L) que está sobre uma mesma linha de corrente, tem-se que

$$e_{(x_0,y_0,z_L)} = \left(\frac{1}{2}v_z^2 + \frac{p}{\rho} + gz\right)_{(x_0,y_0,z_L)}$$

com $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$

Perda de Carga em Tubos

Portanto a diferença entre $e_{(x_0,y_0,z_0)} - e_{(x_0,y_0,z_L)}$ é dada por

$$e_{(x_0,y_0,z_0)} - e_{(x_0,y_0,z_L)} = \left(\frac{p_0}{\rho} + gz_0\right) - \left(\frac{p_L}{\rho} + gz_L\right)$$

$$= \frac{p_0 - p_L}{\rho} + g\left(z_0 - z_L\right)$$

Perda de Carga em Tubos

Uma vez que a velocidade média é dada pela metade da velocidade máxima,

$$\overline{v} = \frac{1}{2} U_{\text{máx}} = -\frac{R^2}{8\mu} \left(\frac{p_L - p_0}{L} + \rho g \right)$$

E que $z_0 - z_L = -L$, pode-se escrever

$$e_{(x_0,y_0,z_0)} - e_{(x_0,y_0,z_L)} = \frac{p_0 - p_L}{\rho} + g\left(z_0 - z_L\right) = \frac{p_0 - p_L}{\rho} - gL = \frac{8\mu L}{\rho R^2}\,\overline{v}$$

Tal diferença $\Delta e = e_{(x_0,y_0,z_0)} - e_{(x_0,y_0,z_L)}$ é uma medida de perda de energia/carga no escoamento.

É fácil ver que, $e_{(x_0,y_0,z_0)} - e_{(x_0,y_0,z_L)}$ tem dependência da velocidade média e sempre será nula, quando a viscosidade for nula, ou seja, para fluido ideal.

Perda de Carga em Tubos

Na literatura clássica, a perda de carga é obtida a partir da equação de Darcy-Weisbach, dada por

$$\Delta e = f \frac{L}{D} \frac{\overline{v}^2}{2}$$

sendo f fator de atrito.

Perda de Carga em Tubos

No caso de escoamento laminar num duto circular, o fator de atrito pode ser calculado analiticamente igualando as expressões já mencionadas acima,

$$\Delta e = f \frac{L}{D} \frac{\overline{v}^2}{2} = \frac{8\mu L}{\rho R^2} \overline{v}$$

$$f \frac{L}{D} \frac{\overline{v}^2}{2} = \frac{64}{\left(\frac{\rho \overline{v} D}{\mu}\right)} \frac{L}{D} \frac{\overline{v}^2}{2}$$

$$f = \frac{64}{Re}$$

No caso de escoamento turbulento através de tubo liso, ou seja, com parede interna com rugosidade desprezível, o fator de atrito é aproximadamente dado por

$$f = \frac{23}{4} (\ln Re)^{-\frac{26}{11}}$$

Para dutos com rugosidade não desprezível, o fator de atrito dependerá da rugosidade relativa e do número de Reynolds, devendo ser obtido diretamente via ábaco de Moody.

"Someone's sitting in the shade today because someone planted a tree a long time ago"

Warren Buffett