

Mecânica dos Fluidos

FLUIDOS E A HIPÓTESE DO CONTÍNUO

R. Sobral

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

rodolfo.sobral@cefet-rj.br

Ementa

- 1 Informações
 - Informações Gerais
- 2 Breve Revisão
 - Cálculo Vetorial
- 3 Conceitos Básicos
 - Definições

Normas

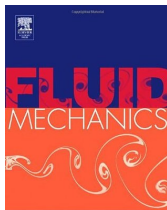
- Notas de Aula não substituem em **hipótese alguma** os livros texto;
- Uso de celular ou outro meio semelhante será proibido durante as avaliações;
- Tempo de duração das avaliações será de 1:40 minutos;
- Não será permitido a utilização de formulários.
- Permite-se a utilização de calculadora.

Não será fornecido formulário nas avaliações, visto que as equações devem ser deduzidas tal qual em sala de aula. As equações não demonstradas são empíricas.

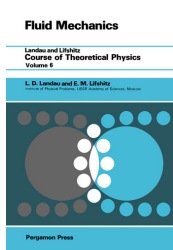
Bibliografia Recomendada

- [I] FOX, R. W. et al., “Introdução à Mecânica dos Fluidos”, LTC;
- [II] POST, S., “Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional”, LTC;
- [III] ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M., “Mecânica dos Fluidos: Fundamentos e Aplicações”, McGraw-Hill;
- [IV] WHITHE, F. M., “Mecânica dos Fluidos”, McGraw-Hill;
- [V] MALISKA, C., “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional”, LTC.

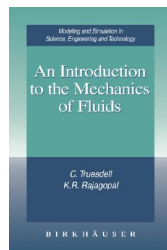
Vasta Bibliografia



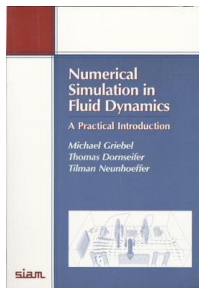
THIRD EDITION
PIJUSH K. KUNDU • IRA M. COHEN
Copyrighted Material



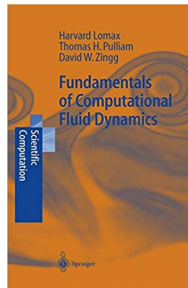
Pergamon Press



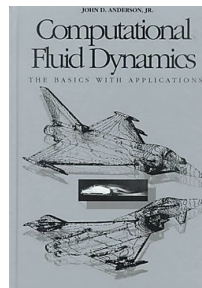
BIRKHÄUSER



siam



Springer



Programa do Curso - Avaliação 01

- **Fluidos e a hipótese do contínuo**
- Estática dos fluidos
- Princípios de conservação e equações do movimento
- Similaridade dinâmica

Programa do Curso - Avaliação 02

- Escoamento invíscido
- Escoamento interno
- Escoamento externo
- Escoamento compressível

Avaliação Final

Aos moldes da Avaliação 01 e 02, sendo obrigatória apenas aos discentes com média menor do que 7,0.

Avaliação Repositiva* e Final conterão todo o conteúdo do curso.

* Avaliação Repositiva dar-se-á apenas àqueles discentes que apresentarem atestado médico comprobatório

Ementa

- 1 Informações
 - Informações Gerais
- 2 Breve Revisão
 - Cálculo Vetorial
- 3 Conceitos Básicos
 - Definições

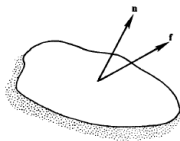
Breve Revisão - Cálculo Vetorial

- Forças de Superfície
- Delta de Kronecker
- Produto Interno
- Produto Vetorial
- Operador ∇
- Derivada Substancial
- Teorema de Gauss e Stokes
- Superfícies

Forças de Superfície

Área de superfície possui magnitude e orientação, portanto deve ser tratada como um vetor. A orientação da superfície é convenientemente especificada pela direção de um vetor unitário normal à superfície. Se dA é a magnitude de um elemento da superfície e $\mathbf{n}$ é o vetor normal a superfície, então a área de superfície pode ser representada como:

$$d\mathbf{A} = \mathbf{n}dA$$



Delta de Kronecker

Sendo e_1 , e_2 e e_3 base de vetores ortonormais, ou seja, ortogonais de norma unitária no espaço euclidiano respeitando-se as seguintes propriedades:

$$e_1 \cdot e_1 = 1$$

$$e_1 \cdot e_2 = 0$$

$$e_1 \cdot e_3 = 0$$

$$e_2 \cdot e_1 = 0$$

$$e_2 \cdot e_2 = 1$$

$$e_2 \cdot e_3 = 0$$

$$e_3 \cdot e_1 = 0$$

$$e_3 \cdot e_2 = 0$$

$$e_3 \cdot e_3 = 1$$

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \text{ (Delta de Kronecker)}$$

$$e_i \cdot e_j = 1, \text{ se } i = j$$

$$e_i \cdot e_j = 0, \text{ se } i \neq j$$

Produto Interno

O produto interno de dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é definido como o escalar

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum u_i v_i$$

Fica claro que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos \theta$, sendo u e v as normas eulerianas dos vetores e θ o ângulo entre eles. O produto interno é portanto a magnitude daquele vetor multiplicado pela componente deste na direção do primeiro.

Claramente, o produto interno $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ é igual a soma dos termos da diagonal do tensor $u_i \cdot v_j$.

$$\|\mathbf{u}\| \equiv (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{.5}$$

$$\left\langle f(z), g(z) \right\rangle = \int_z f(z) g(z) dz$$

Produto Vetorial

O produto vetorial entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é definido como vetor $\mathbf{w}$ cuja magnitude é:

$$\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \sin\theta$$

com direção resultante perpendicular ao plano de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Claramente, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ e os vetores unitários obedecem a regra da mão direita, tal qual $\mathbf{a}^1 \times \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^3$.

Operador ∇

Operador vetorial de Hamilton, também descrito por nabla, está representado nos diferentes tipos de sistemas de coordenadas:

$$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} e_i$$

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + e_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + e_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

O gradiente de um escalar é um vetor, orientado no sentido em que a variação da função f é máxima

Operador ∇

O gradiente de velocidades terá nove elementos como mostra:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

A ação do operador gradiente sobre uma função f resulta em uma grandeza de ordem mais elevada, como mostra:

f	$\text{grad} f$
escalar (tensor de ordem zero)	vetor (tensor de ordem unitária)
vetor (tensor de ordem unitária)	matriz (tensor de ordem dois)

Operador ∇ .

O operador divergente reduz a ordem de um tensor sobre o qual atua. Assim, o divergente de um vetor é um escalar, de um tensor de segunda ordem é um tensor de primeira ordem. Sendo os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{q}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi}$$

Derivada Substancial

Esse operador, quando aplicado a uma propriedade de uma partícula de fluido em movimento, com velocidade $\mathbf{v}$, fornece como resultado a derivada total em relação ao tempo da propriedade daquela partícula em movimento. Consideremos a componente v_x da velocidade da partícula de fluido. Temos que $v_x = v_x(t, x(t), y(t), z(t))$. A derivada total de v_x em relação ao tempo é dada por:

$$\frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Observando que dx/dt , dy/dt e dz/dt são as componentes de velocidade v_x , v_y e v_z , a equação pode ser escrita:

$$\frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} v_x$$

Derivada Substancial

Logo tem-se para derivada substancial:

$$\frac{D}{Dt} v_x = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \right) v_x$$

Para notação de índices ou tensorial cartesiana:

$$\frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_x}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_x}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_x}{\partial x_3} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_x$$

Derivada Substancial

Omitindo-se o sinal de somatório devido sua redundância, tem-se:

$$\frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_x = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) v_x$$

Finalmente o operador substancial é definido como:

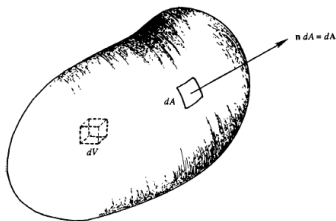
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}$$

Em notação tensorial cartesiana:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Teorema de Gauss

Seja V um volume limitado por uma superfície fechada A . Considere um elemento de superfície infinitesimal dA , sendo $\mathbf{n}$ vetor normal unitário exterior. O vector $\mathbf{n}dA$ de magnitude dA e direção $\mathbf{n}$ pode ser escrito como $d\mathbf{A}$. Para $Q(x)$ campo escalar, vetorial ou tensorial de qualquer ordem, tem-se:



Teorema de Gauss

$$\int_V \frac{\partial Q}{\partial x_i} dV = \int_A dA_i Q$$

Q sendo vetor, o teorema fica:

$$\int_V \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} dV = \int_A dA_i Q_i$$

denominado de Teorema da Divergência de Gauss, em notação vetorial:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{Q} dV = \int_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$$

Teorema de Gauss

Considerado-se o limite para volume infinitesimal e generalizando o campo derivativo Q tem-se:

$$\mathcal{D}Q = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_A dA_i \cdot Q$$

Tal propriedade abrange gradiente, divergente e rotacional de escalares, vetores e tensores Q :

$$\text{div}Q = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_A dA \cdot Q$$

$$\text{rot}Q = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_A dA \times Q$$

Rotacional

$$\text{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$$

$$\text{rot} \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}$$

- Coordenadas Cartesianas

$$\left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \mathbf{k}$$

- Coordenadas Cilíndricas

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z$$

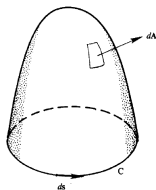
- Coordenadas Esféricas

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z$$

Teorema de Stokes

O teorema de Stokes estabelece que o fluxo do rotacional de um vetor $\mathbf{u}$ através de uma superfície A é igual à integral de linha da projeção da velocidade sobre a tangente à curva C que limita a superfície considerada. Essa propriedade se expressa por:

$$\int_A (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{A} = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$$



Superfícies

Qualquer superfície S , subconjunto da superfície ∂R que representa a fronteira da região tridimensional R , pode ser representada pela relação biparamétrica $(x, y, z) = \mathbf{f}(u, v)$, sendo u e v parâmetros independentes.

Superfícies

Sendo u e v parâmetros independentes e sendo $(x, y, z) = \mathbf{f}(u, v)$ diferenciável em relação a esses parâmetros, podemos caracterizar um vetor normal num ponto genérico sobre a superfície a partir do produto vetorial abaixo:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial}{\partial u} [\mathbf{f}(u, v)] \times \frac{\partial}{\partial v} [\mathbf{f}(u, v)]$$

Superfícies

O elemento diferencial de superfície que integrado sobre S fornece a área desta superfície dada por

$$dS = \| \mathbf{N} \| dudv = \left\| \frac{\partial}{\partial u} [\mathbf{f}(u, v)] \times \frac{\partial}{\partial v} [\mathbf{f}(u, v)] \right\| dudv$$

Superfícies

O vetor normal unitário exterior à região R dado por

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}$$

no qual a opção entre " + " ou menos " - " será feita de tal maneira que, em cada ponto sobre S , $\mathbf{n}$ aponte "para fora" da região R .

Exemplo de parametrização de uma casca esférica definida por $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$x = r \cos v \operatorname{senv} u$$

$$y = r \operatorname{senv} v \operatorname{senv} u$$

$$z = r \cos u$$

$$\text{com } 0 \leq v \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq u \leq \pi$$

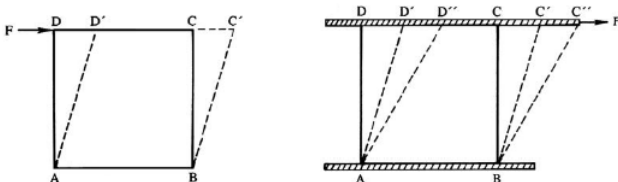
Ementa

- 1 Informações
 - Informações Gerais
- 2 Breve Revisão
 - Cálculo Vetorial
- 3 Conceitos Básicos
 - Definições

O que é a Mecânica dos Fluidos?

Fluido

Substância que se deforma continuamente sob a aplicação de uma tensão cisalhante por menor que ela seja, assim, os fluidos compreendem as fases líquida, gasosa e/ou vapor.

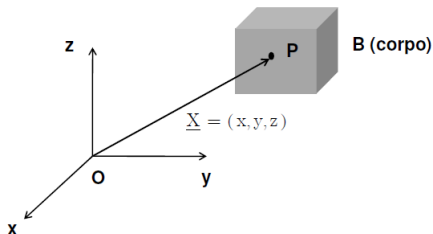


Hipótese do Meio Contínuo

Fluidos são compostos de um grande número de moléculas em constante movimento, a matéria é descontínua, discreta em escala microscópica. A descrição em nível molecular faz-se através de técnicas da mecânica estatística.

Consequência da Hipótese do Meio Contínuo

As propriedades do meio são consideradas como tendo um valor definido em cada ponto do espaço, podendo ser descritas como funções contínuas posição espacial e tempo. Estas funções são conhecidas como campos e podem ser escalares, vetoriais e tensoriais.



- Massa específica em um ponto:

$$\rho \equiv \lim_{\delta V \rightarrow \delta V'} \frac{\delta m}{\delta V}$$

- Campo da massa específica:

$$\rho = \rho(x, y, z, t) = \rho(\underline{X}, t)$$

Métodos de Análise

Definição do sistema a ser analisado:

- Em mecânica do corpo rígido: Diagrama de Corpo Livre
- Em mecânica dos fluidos: Sistema / Volume de Controle
- Em termodinâmica: Sistema Aberto ou Fechado

Sistema:

- Representa uma quantidade fixa e identificável de massa
- Limites fixos ou móveis
- Não há saída nem entrada de massa

Métodos de Análise

- **Volume de Controle:**

No escoamento de fluidos através de equipamentos, é difícil focalizar a atenção numa determinada quantidade de massa fixa e identificável, sendo mais conveniente focalizar a atenção, para fins de análise, em um volume arbitrário e fixo no espaço através do qual o fluido escoar.

- **Superfície de Controle:**

Contorno geométrico (real ou imaginário, em repouso ou movimento) do volume de controle.

Métodos de Análise - Classificação

Método Integral:

- Determinação do comportamento global do escoamento;
- Baseado em equações integrais;
- Aplicado na análise de sistemas/volumes de controle finitos.

Método Diferencial:

- Determinação do comportamento detalhado do escoamento;
- Baseado em equações diferenciais;
- Aplicado na análise de sistemas/volumes de controle infinitesimais.

Métodos de Análise - Classificação

Método de Lagrange:

- A partícula é acompanhada durante o deslocamento;
- Adequado para aplicação na mecânica do corpo rígido.

Método de Euler:

- É empregada a descrição de campo das grandezas pertinentes ao fenômeno;
- Adequado para aplicação na mecânica dos fluidos.

Campo:

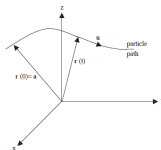
Define o valor de uma determinada grandeza do escoamento, como função contínua da posição (ponto) no espaço e do tempo

Descrição Euleriano e Lagrangiana

Existem dois modos de descrição do movimento do fluido.

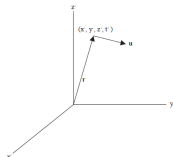
- Descrição Lagrangiana

Histórico individual da partícula fluida.



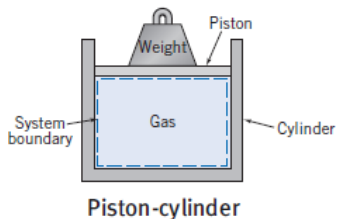
- Descrição Euleriana

Campo de escoamento, foco nas propriedades do escoamento num determinado ponto espacial como função temporal. As propriedades do campo são descritas como funções das coordenadas espaciais e tempo, geralmente utilizado na descrição de meios contínuos.



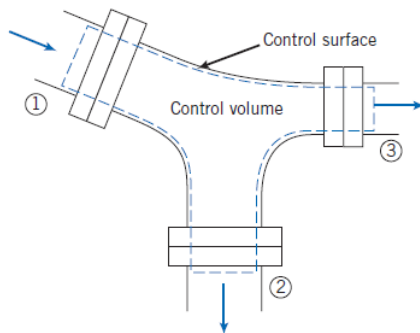
Sistema e Volume de Controle

Sistema ou Volume Material (P_t ou R): É uma quantidade de matéria fixa e identificável, admitindo-se apenas trânsito de energia na forma de calor ou trabalho através de sua fronteira.

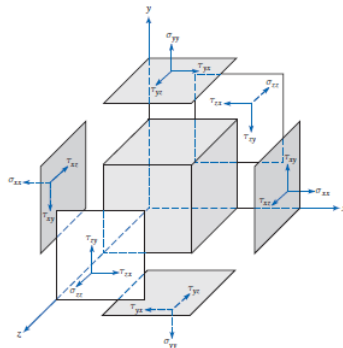


Sistema e Volume de Controle

Volume de Controle (Ω): É uma região do espaço delimitada por uma superfície fixa através da qual um fluido escoa. Além do trânsito de energia, há também fluxo de massa através da superfície de controle $\partial\Omega$.

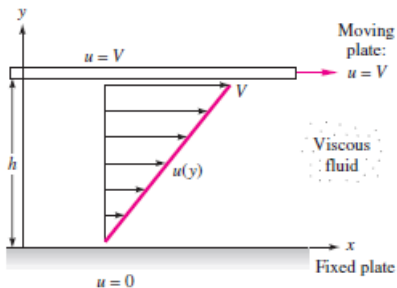


Estado de Tensão



$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

Fluido Newtoniano



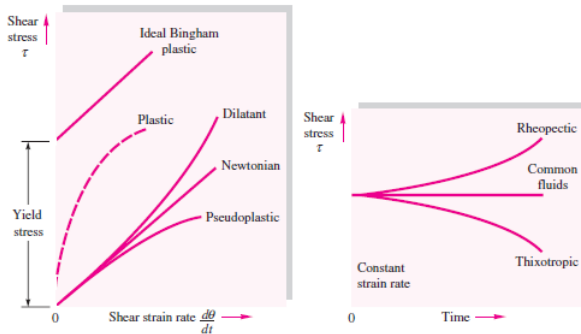
$$F \propto A \cdot \frac{dv}{dy}$$

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

- Viscosidade Cinemática

$$\nu = \mu / \rho$$

Fluidos Não Newtoniano



$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$$

Classificação de Escoamentos

- Permanentes e Transientes;

Nos escoamentos permanentes os campos de velocidade e massa específica não dependem do tempo.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

- Compressíveis e Incompressíveis;

Nos escoamentos incompressíveis ou isocóricos o divergente do campo de velocidades é nulo.

$$\text{div} \mathbf{v} = 0$$

Classificação de Escoamentos

- Desenvolvidos e Não Desenvolvidos;

Nos escoamentos plenamente desenvolvidos o perfil de velocidades não se altera na direção do escoamento, o escoamento dar-se em regime permanente e se caracterizam pela ortogonalidade entre os campos de aceleração e velocidades.

- Laminares e Turbulentos.

Nos escoamentos laminares o fluido flui ordenadamente como se fossem lâminas escorregando sobre lâminas, já nos escoamentos turbulentos há desordem macroscópica, flutuações no campo de velocidades.

Classificação de Fluidos - Vídeos

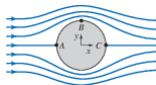
- Vídeo 01;
- Vídeo 02;
- Vídeo 03.

Classificação de Fluidos

- Inviscíveis.

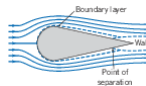
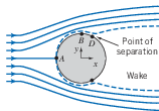
Aqueles cuja viscosidade é nula.

Paradoxo de d'Alembert foi esclarecido apenas em 1904 por Prandtl.



- Viscosos;

Aqueles cuja viscosidade é diferente de zero.



Sistema de Coordenadas

O conjunto de parâmetros $[u, v, w]$ é dito um sistema de coordenadas se o determinante da matriz jacobiano for não-nulo.

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

Bases

Associado a cada sistema de coordenadas, existe um conjunto de bases denominados: natural, dual e física.

Base Natural

Seus elementos são os campos vetoriais e_u , e_v e e_w , dados por

$$e_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k}$$

$$e_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$$

$$e_w = \frac{\partial x}{\partial w} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial w} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial w} \mathbf{k}$$

Qualquer vetor w no espaço pode ser representado no sistema de coordenadas $[u, v, w]$ por meio da combinação linear dos vetores que compõem a base

$$w = w^u e_u + w^v e_v + w^w e_w$$

onde w^u , w^v e w^w são denominadas componentes contravariantes.

Base Dual

Seus elementos são os campos vetoriais e^u , e^v e e^w , dados por

$$e^u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$e^v = \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$e^w = \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial z} \mathbf{k}$$

Qualquer vetor w no espaço pode ser representado no sistema de coordenadas $[u, v, w]$ por meio da combinação linear dos vetores que compõem a base

$$w = w_u e^u + w_v e^v + w_w e^w$$

onde w_u , w_v e w_w são denominadas componentes covariantes.

Bases Natural e Dual

Para

$$e^u \cdot e_u = 1, \quad e^u \cdot e_v = 0, \quad e^u \cdot e_w = 0$$

$$e^v \cdot e_u = 0, \quad e^v \cdot e_v = 1, \quad e^v \cdot e_w = 0$$

$$e^w \cdot e_u = 0, \quad e^w \cdot e_v = 0, \quad e^w \cdot e_w = 1$$

e que:

$$w_u = w \cdot e_u \quad e \quad w^u = w \cdot e^u$$

$$w_v = w \cdot e_v \quad e \quad w^v = w \cdot e^v$$

$$w_w = w \cdot e_w \quad e \quad w^w = w \cdot e^w$$

Base Física

Um sistema de coordenadas é dito ortogonal sempre que os vetores da base natural e/ou dual forem mutuamente ortogonais. Nestes casos, pode-se definir uma base ortonormal associada, denominada base física.

$$e_{\langle u \rangle} = \frac{e_u}{||e_u||} = \frac{e^u}{||e^u||}$$

$$e_{\langle v \rangle} = \frac{e_v}{||e_v||} = \frac{e^v}{||e^v||}$$

$$e_{\langle w \rangle} = \frac{e_w}{||e_w||} = \frac{e^w}{||e^w||}$$

Qualquer vetor w no espaço pode ser representado por meio da expressão

$$w = w_{\langle u \rangle} e_{\langle u \rangle} + w_{\langle v \rangle} e_{\langle v \rangle} + w_{\langle w \rangle} e_{\langle w \rangle}$$

onde $w_{\langle u \rangle}$, $w_{\langle v \rangle}$ e $w_{\langle w \rangle}$ são denominadas componentes físicas.

Movimento

Define-se movimento como sendo a função que associa, para cada instante de tempo t , um ponto material e sua posição espacial x .

$$x = \chi(\bullet, t)$$

A massa contida em uma região R no instante de tempo t é

$$M_R = \int_R \rho dV$$

A massa específica média de um corpo contínuo ocupando a região R é

$$\rho = \frac{\int_R \rho dV}{\int_R dV}$$

Movimento

O campo de velocidades é uma função que associa, para cada instante de tempo t , um valor da velocidade v para cada posição espacial x :

$$v = \frac{\partial}{\partial t} [\chi(\bullet, t)] = \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{\text{ponto material fixo}}$$

Linha de Trajetória

É a curva descrita por um ponto material durante o movimento de um corpo contínuo.

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{com} \quad x = x_0 \quad \text{para} \quad t = 0$$

componentes cartesianas

$$\frac{dx}{dt} = v.i = v_x$$

$$\frac{dy}{dt} = v.j = v_y$$

$$\frac{dz}{dt} = v.k = v_z$$

com

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) \quad \text{para} \quad t = 0$$

Linha de Corrente

São curvas tangentes, num dado instante de tempo, em todos os seus pontos ao campo de velocidades. Em outras palavras, o vetor tangente em cada ponto sobre uma linha de corrente é paralelo à velocidade naquele ponto.

$$\frac{dx}{d\xi} = \gamma \mathbf{v} \Big|_{t=t_0}, \quad \text{com} \quad \mathbf{x} \in \text{linha de corrente}$$

onde ξ é um parâmetro e γ uma função de ξ estritamente positiva.

$$\frac{dx}{d\xi} = v_x \Big|_{t=t_0}$$

$$\frac{dy}{d\xi} = v_y \Big|_{t=t_0}$$

$$\frac{dz}{d\xi} = v_z \Big|_{t=t_0}$$

com

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) \quad \text{para} \quad \xi = \xi_0$$

Para escoamentos em regime permanente as linhas de trajetória e corrente são as mesmas.

Função de Corrente

O conceito de função de corrente representa matematicamente as componentes da velocidade para um escoamento bidimensional incompressível (isocórico) utilizando uma única função $\Psi(x, y, t)$.

$$v_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

e

$$v_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

como escoamento é incompressível $\text{div} \mathbf{v} = 0$, daí

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0$$

Aceleração

Taxa de variação da velocidade de um ponto material.

$$a_* = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{v_*|_{t+\Delta t} - v_*|_t}{\Delta t} \right]$$

Derivada Material

Taxa de variação de certa quantidade tomada para um ponto material fixo. A aceleração é a derivada material da velocidade, levando-se em conta a linha de trajetória, tem-se:

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}(x(t), y(t), z(t), t)$$

Derivando-se a função composta, temos:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + (\text{grad} \Psi) \mathbf{v}$$

Vorticidade

É a velocidade angular local definida em cada ponto espacial ocupado por um corpo contínuo. Uma vez que estamos lidando com corpos deformáveis, define-se cada componente do vetor vorticidade a partir da média aritmética das velocidades angulares de duas retas materiais ortogonais. Esse conceito generaliza o conceito de velocidade angular de um corpo rígido.

Para um corpo rígido, a velocidade angular tem o mesmo valor em todos os pontos. Para um corpo deformável, ela é um campo, ou seja, depende da posição.

$$\boldsymbol{w} = w_x \boldsymbol{i} + w_y \boldsymbol{j} + w_z \boldsymbol{k}$$

Escoamentos nos quais não há rotação são denominados irrotacionais (inviscídicos), todo fluido viscoso sofre rotação, visto que possui tensão cisalhante.

Componente em z

Sendo w_z a velocidade angular num dado ponto, projetada sobre a direção e sentido de $\mathbf{k}$ (plano xy)

$$w_z = \frac{1}{2} (w_{\text{vertical}} + w_{\text{horizontal}})$$

Obedecendo a regra da mão direita, note que temos a metade do operador "rotacional" aplicado sobre o campo de velocidades em z

$$w_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{k}$$

Vorticidade

O campo de velocidade angular (rotação) corresponde à metade do rotacional do campo de velocidades

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right]$$

Vorticidade

Precauções devem ser tomadas para que não haja confusão entre rotação de uma partícula fluida com um escoamento consistindo em linhas de corrente circulares (vórtices).

O operador vorticidade ζ corresponde ao dobro do campo de velocidades angulares, como mostra

$$\zeta = 2\omega = \nabla \times \mathbf{v}$$

Corpo Rígido

Um corpo realiza um movimento de corpo rígido se a distância entre quaisquer dois pontos materiais for invariante no tempo. Denotando por x_1 a posição do ponto material 1 e por x_2 a posição do ponto material 2,

$$||x_2 - x_1|| = \text{constante para qualquer } t \text{ dado}$$

Ou seja,

$$\frac{D}{Dt} [(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_1)] = 0$$

empregando a definição de velocidade

$$(x_2 - x_1) \cdot (v_2 - v_1) = 0$$

Corpo Rígido

quando $x_2 \rightarrow x_1$

$$v_2 - v_1 = [grad\ v]_{x_1} (x_2 - x_1)$$

Portanto,

$$(x_2 - x_1) \cdot (v_2 - v_1) = 0 \quad \rightarrow \quad (x_2 - x_1) \cdot [grad\ v]_{x_1} (x_2 - x_1) = 0$$

pela definição de transposição,

$$grad\ v = - [grad\ v]^T$$

caracterizando assim movimento de corpo rígido.

"Someone's sitting in the shade today because someone planted a tree a long time ago"

Warren Buffett