

Maquinas de Fluxo I

PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO E EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

R. Sobral

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

rodolfo.sobral@cefet-rj.br

Programa do Curso - Avaliação 01

- Introdução e hipótese do contínuo
- **Princípios de conservação e equações do movimento**
- Similaridade dinâmica
- Tipos de escoamento
- Funcionamento e performance

Teorema do Transporte

A seguir serão apresentados argumentos que demonstram que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Psi dV = \int_{\Omega_t} \left(\frac{D\Psi}{Dt} + \Psi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = \int_R \left(\frac{D\Psi}{Dt} + \Psi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV$$

onde R é uma região fixa no espaço coincidente com Ω_t (região ocupada por um dado corpo no instante t dependente do tempo)

Teorema do Transporte

Sendo Ω_0 a região ocupada pelo corpo no instante $t = 0$, visto que cada ponto material possui sua própria linha de trajetória, então associa-se a cada ponto da região $\Omega_0 - (u, v, w)$ um ponto da região $\Omega_t - (x, y, z)$.

Portanto (u, v, w) pode ser tratado como sistema de coordenadas, visto que cada uma das variáveis x , y e z é função de u , v e w .

Teorema do Transporte

Assim, pode-se promover uma mudança de variáveis na integração tripla de um dado campo, como mostra

$$\iiint_{\Omega_t} \Psi dx dy dz = \iiint_{\Omega_0} \Psi J du dv dw$$

Teorema do Transporte

Para cada instante,

$$J = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Teorema do Transporte

Uma vez que o domínio Ω_0 é fixo (não varia com o tempo), escreve-se

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Psi dV = \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} (J\Psi) dV$$

sendo $\frac{\partial}{\partial t} (J\Psi)$ derivada parcial de domínio (u, v, w, t) , para u , v e w fixados, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} (J\Psi) = J \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial J}{\partial t}$$

Em outras palavras, é uma derivada material, pois o ponto material é mantido fixo

Teorema do Transporte

Para Jacobiano,

$$J = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$
$$= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u}$$

Teorema do Transporte

A derivada temporal do Jacobiano fica,

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

Teorema do Transporte

Pela definição de velocidade,

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial t} &= \frac{\partial v_x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial v_y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v_z}{\partial w} \\ &+ \frac{\partial v_x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v_y}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial v_z}{\partial u} \\ &+ \frac{\partial v_x}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial v_y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial v_z}{\partial v} \\ &- \frac{\partial v_x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial v_y}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial v_z}{\partial v} \\ &- \frac{\partial v_x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v_y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial v_z}{\partial w} \\ &- \frac{\partial v_x}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial v_y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v_z}{\partial u}\end{aligned}$$

Teorema do Transporte

Uma vez que é possível representar as componentes do campo de velocidades como funções de x , y e z , emprega-se a regra da cadeia,

$$\frac{\partial v_x}{\partial u} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$$

Teorema do Transporte

Logo a derivada do determinante é representada como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} = & \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial u} \right. \\ & \left. + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right\} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \operatorname{div} \mathbf{v}$$

Teorema do Transporte

Dessa forma,

$$\frac{\partial}{\partial t} (J\Psi) = J \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial J}{\partial t} = J \left[\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \operatorname{div} \mathbf{v} \right]$$

Teorema do Transporte

Voltando ao argumento apresentado no slide inicial, pode-se escrever então,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Psi dV = \int_{\Omega_0} J \left[\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV$$

Levando-se em consideração ponto material fixo, tem-se que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Psi dV = \int_{\Omega_t} \left[\frac{D\Psi}{Dt} + \Psi \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV$$

No momento em que a configuração de referência coincidir com uma certa região R ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Psi dV = \int_R \left[\frac{D\Psi}{Dt} + \Psi \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV$$

Ponderações

Vale chamar a atenção na diferença entre os significados físicos das integrais de superfície sobre $\partial\Omega_t$ e sobre ∂R , no instante em que $\partial\Omega_t \equiv \partial R$.

Por exemplo, o valor das quantidades $\int_{\partial R} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ e $\int_{\partial\Omega_t} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ num instante de em que $\partial\Omega_t \equiv \partial R$ é o mesmo, porém $\int_{\partial R} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ representa o fluxo de massa cruzando a fronteira da região fixa R , já $\int_{\partial\Omega_t} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ não representa o fluxo de massa cruzando a fronteira da região Ω_t .

A fronteira da região Ω_t é uma fronteira material e se desloca com a mesma velocidade do meio (corpo) contínuo, enquanto a fronteira R é fixa.

Teorema de Transporte - Campo escalar

Reescrevendo a equação anterior para um campo escalar f :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f dV = \int_R \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \mathbf{v}) \right] dV$$

Utilizando-se do Teorema da divergência de Gauss, reescrevemos a equação acima como

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f dV = \int_R \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{\partial R} f (\mathbf{v} \mathbf{n}) dS$$

Aplicando finalmente o teorema de Leibnitz, tem-se para condição de coincidir a configuração atual com a região espacial de referência R

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_R f dV + \int_{\partial R} f (\mathbf{v} \mathbf{n}) dS$$

Teorema de Transporte - Campo Vetorial

Reescrevendo a equação anterior para um campo vetorial w :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} w dV = \int_{\Omega_t} \left[\frac{Dw}{Dt} + w \operatorname{div} v \right] dV$$

Desenvolvendo a derivada material, agrupando-se os termos e aplicando as propriedades do cálculo tensorial, tem-se

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} w dV = \int_R \left[\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} (w \otimes v) \right] dV$$

Aplicando o teorema da divergência de Gauss juntamente com o teorema de Leibnitz, tem-se para condição de coincidir a configuração atual com a região espacial de referência R

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} w dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_R w dV + \int_{\partial R} w (vn) dS$$

Teorema de Transporte - Cálculo Tensorial

O teorema do transporte estabelece, no caso de campos regulares, que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Psi dV = \int_{\Omega_t} \left[\frac{d}{dt} (\tilde{\Psi}(\mathbf{X}, t)) + (\tilde{\Psi}(\mathbf{X}, t)) \operatorname{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \mathbf{F}^{-1} \right) \right] dV$$

onde $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t)$, $\frac{D}{Dt}$ representa a derivada material e Ω_t é a configuração do corpo no instante t (pode variar com o tempo t).

Equação da Continuidade

Axioma: a quantidade de matéria associada a uma dada parte de um corpo contínuo é invariante no tempo, em outras palavras

$$\frac{d}{dt} M_{\text{corpo}} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dV = 0$$

onde Ω_t denota a região ocupada pelo corpo contínuo no instante de tempo t .

Equação da Continuidade

O teorema do transporte estabelece que,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dV = \int_{\Omega_t} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV$$

onde $\frac{D\rho}{Dt}$ representa a derivada material do campo de massa específica.

Equação da Continuidade - Forma Global

Portanto, o axioma da conservação da massa,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dV = \int_{\Omega_t} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV = 0$$

Equação da Continuidade - Forma Local

Uma vez que a região Ω_t é arbitrária, conclui-se que,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0$$

visto que,

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho$$

Tensor Tensão de Cauchy

Na mecânica dos corpos contínuos, temos dois tipos de forças, forças de corpo e de superfície.

- Forças de Corpo $\rightarrow$ atuam sobre todos os pontos materiais do corpo;
- Forças de Superfície de Contato $\rightarrow$ atuam sobre a fronteira do corpo.

Tensor Tensão de Cauchy

Sendo $\mathbf{g}$ o vetor aceleração da gravidade, a força de corpo atuando sobre a região Ω_t será,

$$\mathbf{F}_{\text{corpo}} = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} dV$$

Sendo a tensão representada por $\mathbf{t}$, a força de superfície exercida sobre S , para $S \subseteq \partial\Omega_t$,

$$\mathbf{F}_{\text{contato}} = \int_S \mathbf{t} dS$$

Vale ressaltar que $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}$

Quantidade de Movimento Linear

O primeiro axioma de Euler estabelece que a taxa de variação no tempo da quantidade de movimento linear de um corpo, referente a um referencial fixo, é igual a soma das forças externas atuando sobre esse corpo.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dV = \sum \mathbf{F}_{\text{externas}}$$

ou

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} dV = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T} \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} dV$$

Quantidade de Movimento Linear

O teorema do transporte estabelece que,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\Omega_t} \left[\frac{D(\rho \mathbf{v})}{Dt} + (\rho \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\Omega_t} \left[\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{v} \frac{D\rho}{Dt} + (\rho \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV$$

Quantidade de Movimento Linear

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\Omega_t} \left[\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{v} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right] dV$$

Vide equação da continuidade $\int_{\Omega_t} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV = 0$, reescrevendo a QML, tem-se

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\Omega_t} \left[\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right] dV$$

Quantidade de Movimento Linear - Forma Global

Portanto, a equação global da quantidade de movimento linear fica

$$\int_{\Omega_t} \left[\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right] dV = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T}\mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} dV$$

empregando teorema da divergência

$$\int_{\Omega_t} \left[\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right] dV = \int_{\Omega_t} \text{div} \mathbf{T} dV + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} dV$$

Quantidade de Movimento Linear - Forma Local

Uma vez que a região Ω_t é arbitrária, conclui-se que,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g}$$

ou

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} \right] = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g}$$

Quantidade de Movimento Linear - Forma Local

No sistema de coordenadas cartesiano retangular,

$$\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho g_x$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho g_y$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z$$

Quantidade de Movimento Angular

O segundo axioma de Euler estabelece que a taxa de variação no tempo da quantidade de movimento angular de um corpo, referente a um referencial fixo, é igual a soma dos torques atuando sobre esse corpo.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV = \sum M_{\text{externos}}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{v}) dV &= \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS + \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{g}) dV + \mathbf{T}_{\text{eixo}} \\ &= \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{r} \times (\mathbf{T} \mathbf{n}) dS + \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{g}) dV + \mathbf{T}_{\text{eixo}} \end{aligned}$$

onde $\mathbf{r}$ representa o vetor posição em relação a algum ponto fixo ($\mathbf{r}$ é o braço da alavanca, podendo sem perda de generalidade ser o próprio vetor posição $\mathbf{x}$, ao considerar a origem no ponto fixo em questão)

Quantidade de Movimento Angular

O teorema do transporte estabelece que,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV = \int_{\Omega_t} \left[\frac{D[\rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v})]}{Dt} + [\rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v})] \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV = \int_{\Omega_t} \left[\rho \frac{D(\mathbf{x} \times \mathbf{v})}{Dt} + (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) \frac{D\rho}{Dt} + (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV$$

Quantidade de Movimento Angular

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV = \int_{\Omega_t} \left[\rho \frac{D(\mathbf{x} \times \mathbf{v})}{Dt} + (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right] dV$$

Vide equação da continuidade $\int_{\Omega_t} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV = 0$, reescrevendo a QMA, tem-se

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV = \int_{\Omega_t} \left[\rho \frac{D(\mathbf{x} \times \mathbf{v})}{Dt} \right] dV$$

Quantidade de Movimento Angular

Uma vez que $\mathbf{x}$ é o vetor posição, reescreve-se

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV = \int_{\Omega_t} \left[\rho \mathbf{x} \times \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right] dV$$

Quantidade de Movimento Angular - Forma Global

Portanto, a equação global da quantidade de movimento angular fica

$$\int_{\Omega_t} \left[\rho \mathbf{x} \times \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right] dV = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{x} \times (\mathbf{T}\mathbf{n}) dS + \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{g}) dV + \mathbf{T}_{\text{eixo}}$$

Primeira e Segunda Lei da Termodinâmica

As leis da termodinâmica já foram exaustivamente abordadas na disciplina antecedente ao presente curso.

Equação de Bernoulli

Define-se fluido ideal como um meio contínuo que, sob quaisquer circunstâncias, tem o tensor de Cauchy múltiplo do tensor identidade. Em outras palavras, para um fluido ideal,

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1}$$

Onde p é a pressão, inferindo tensão cisalhante sempre nula. A forma local da equação da quantidade de movimento linear é dada por (para qualquer meio contínuo)

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} \right] = \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g}$$

Equação de Bernoulli

Assim, para um fluido ideal, a equação anterior se reduz a

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} \right] = -\text{grad} p + \rho \mathbf{g}$$

que é chamada equação de Euler.

Suponhamos agora um escoamento de fluido ideal em regime permanente (velocidade não dependendo explicitamente do tempo). Nesse caso, a equação de Euler pode ser escrita como

$$\rho (\text{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} = -\text{grad} p + \rho \mathbf{g}$$

Equação de Bernoulli

Se a massa específica depender apenas da pressão (podendo inclusive ser constante), a equação anterior pode ser representada por

$$(grad v) v = -grad \left(\int \frac{dp}{\rho} \right) + g$$

Considerando o eixo "z" paralelo ao vetor aceleração da gravidade, de tal forma que

$$g \cdot k = -||g|| = -g = constante$$

Podendo representar o vetor aceleração da gravidade como

$$g = -grad(gz)$$

Equação de Bernoulli

Pela definição do operador rotacional, temos que

$$(\text{rot} \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = (\text{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} - (\text{grad} \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{v}$$

$$(\text{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} = (\text{grad} \mathbf{v})^T \mathbf{v} + (\text{rot} \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$$

Onde

$$(\text{grad} \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{v} = \text{grad} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right)$$

Assim a equação de Euler se reduz a

$$(\text{rot} \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\text{grad} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) - \text{grad} \left(\int \frac{dp}{\rho} \right) - \text{grad}(gz)$$

Equação de Bernoulli

Ou seja,

$$(\text{rot} \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\text{grad} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + gz \right) = -\text{grad} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz \right)$$

Assim levando-se em conta que

$$[(\text{rot} \mathbf{v}) \times \mathbf{v}] \cdot \mathbf{v} = 0$$

Tem-se:

$$-\text{grad} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz \right) \cdot \mathbf{v} = 0$$

Equação de Bernoulli

Caracterizando as linhas de corrente como curvas de nível das grandezas entre parênteses. Tem-se então a Equação de Bernoulli

$$\frac{1}{2}||\mathbf{v}||^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{constante sobre uma linha de corrente}$$

Para escoamentos irrotacionais (ou potenciais), teremos que em toda parte

$$\text{rot}\mathbf{v} = 0$$

Logo, a equação de Bernoulli vale para todo o escoamento

$$\frac{1}{2}||\mathbf{v}||^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{constante em todo o escoamento}$$

Equação de Bernoulli

Quando a massa específica for constante, tem-se

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \textit{constante}$$

Daí a equação de Bernoulli é expressa da forma (mais comumente encontrada na literatura)

$$\frac{1}{2}||\boldsymbol{v}||^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \textit{constante}$$

Equação de Bernoulli - Limitações

- Tubos longos (Atrito - efeitos viscosos);
vspace.3cm
- Difusores (Aumento da camada limite - efeitos viscosos);
- escoamentos externos (Unidimensionalidade - afastamento da L.C.);
- Máquinas de Fluxo (Afastamento da L.C.);
- escoamentos compressíveis ($\rho \neq cte$);
- Variações de temperatura (Causam variações de ρ).

Perda de Carga em Tubos

Considerando o perfil de velocidades plenamente desenvolvido num duto circular reto, como mostra

$$v_z = -\frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{p_L - p_0}{L} - \rho g_z \right) \left[1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right]$$

Perda de Carga em Tubos

As linhas de corrente para esse escoamento são retas paralelas ao eixo z . A energia mecânica num dado ponto (x_0, y_0, z_0) desse escoamento é dada por

$$e_{(x_0, y_0, z_0)} = \left(\frac{1}{2} v_z^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right)_{(x_0, y_0, z_0)}$$

com $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$

Perda de Carga em Tubos

No ponto (x_0, y_0, z_L) que está sobre uma mesma linha de corrente, tem-se que

$$e_{(x_0, y_0, z_L)} = \left(\frac{1}{2} v_z^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right)_{(x_0, y_0, z_L)}$$

com $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$

Perda de Carga em Tubos

Portanto a diferença entre $e_{(x_0, y_0, z_0)} - e_{(x_0, y_0, z_L)}$ é dada por

$$\begin{aligned} e_{(x_0, y_0, z_0)} - e_{(x_0, y_0, z_L)} &= \left(\frac{p_0}{\rho} + gz_0 \right) - \left(\frac{p_L}{\rho} + gz_L \right) \\ &= \frac{p_0 - p_L}{\rho} + g(z_0 - z_L) \end{aligned}$$

Perda de Carga em Tubos

Uma vez que a velocidade média é dada pela metade da velocidade máxima,

$$\bar{v} = \frac{1}{2} U_{\text{máx}} = -\frac{R^2}{8\mu} \left(\frac{p_L - p_0}{L} + \rho g \right)$$

Perda de Carga em Tubos

E que $z_0 - z_L = -L$, pode-se escrever

$$e_{(x_0, y_0, z_0)} - e_{(x_0, y_0, z_L)} = \frac{p_0 - p_L}{\rho} + g(z_0 - z_L) = \frac{p_0 - p_L}{\rho} - gL = \frac{8\mu L}{\rho R^2} \bar{v}$$

Tal diferença $\Delta e = e_{(x_0, y_0, z_0)} - e_{(x_0, y_0, z_L)}$ é uma medida de perda de energia/carga no escoamento.

É fácil ver que, $e_{(x_0, y_0, z_0)} - e_{(x_0, y_0, z_L)}$ tem dependência da velocidade média e sempre será nula, quando a viscosidade for nula, ou seja, para fluido ideal.

Perda de Carga em Tubos

Na literatura clássica, a perda de carga é obtida a partir da equação de Darcy-Weisbach, dada por

$$\Delta e = f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2}$$

sendo f fator de atrito.

Perda de Carga em Tubos

No caso de escoamento laminar num duto circular, o fator de atrito pode ser calculado analiticamente igualando as expressões já mencionadas acima,

$$\Delta e = f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2} = \frac{8\mu L}{\rho R^2} \bar{v}$$

$$f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2} = \frac{64}{\left(\frac{\rho \bar{v} D}{\mu}\right)} \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2}$$

$$f = \frac{64}{Re}$$

Perda de Carga em Tubos

No caso de escoamento turbulento através de tubo liso, ou seja, com parede interna com rugosidade desprezível, o fator de atrito é aproximadamente dado por

$$f = \frac{23}{4} (\ln Re)^{-\frac{26}{11}}$$

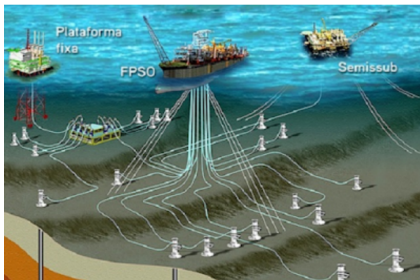
Para dutos com rugosidade não desprezível, o fator de atrito dependerá da rugosidade relativa e do número de Reynolds, devendo ser obtido diretamente via ábaco de Moody.

Vídeo 01

Vídeo 02

Aplicações

- **Risers offshore** - <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2012.10.014>

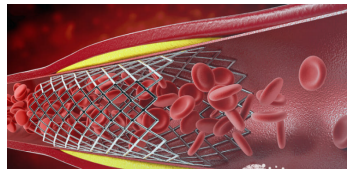
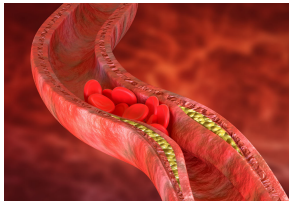


(a) Flexível



(b) Rígido

- **Angioplastia Stent** - <https://doi.org/10.1152/japplphysiol.91519.2008>



"Há uma força motriz mais poderosa que o vapor, eletricidade e energia atômica: a vontade"

Albert Einstein