

Mecânica dos Fluidos

PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO E EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

R. Sobral

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

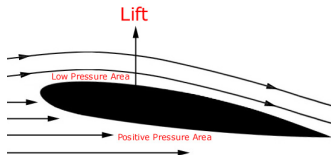
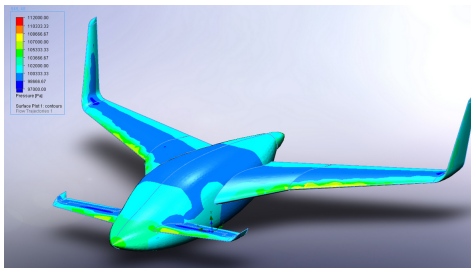
rodolfo.sobral@cefet-rj.br

Programa do Curso - Avaliação 01

- Fluidos e a hipótese do contínuo
- Estática dos fluidos
- **Princípios de conservação e equações do movimento**
- Similaridade dinâmica

Abordagem Global x Local

Por exemplo, a modelagem integral pode fornecer informações gerais sobre a sustentação gerada por uma asa de avião, mas não pode ser utilizada para determinar a distribuição de pressão que produz a sustentação sobre a asa.



Equação da Continuidade

Como já foi apresentado a equação da continuidade na forma local

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$$

- Fluido Incompressível $\rightarrow$ a massa específica é constante $\rho = cte$, não é função nem das coordenadas espaciais e nem do tempo (isocórico).

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

- Escoamento permanente $\rightarrow$ todas as propriedades dos fluidos são independentes do tempo.

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$$

Os fluidos newtonianos são formalmente caracterizados pela seguinte equação constitutiva para o tensor tensão de Cauchy

$$\boldsymbol{T} = -p\mathbf{1} + \lambda (\operatorname{div} \boldsymbol{v}) \mathbf{1} + \mu \left[\operatorname{grad} \boldsymbol{v} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{v})^T \right]$$

Fluido Newtoniano

Em outras palavras, as tensões normais e cisalhantes são,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

Fluido Newtoniano Incompressível

Se o escoamento em questão for isocórico, ou seja, incompressível, tem-se que o divergente do campo de velocidades nulo ($\text{div} \mathbf{v} = 0$), portanto

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mu \left[\text{grad} \mathbf{v} + (\text{grad} \mathbf{v})^T \right]$$

Equação Local da Quantidade de Movimento Linear

Substituindo esta relação constitutiva acima na equação local da quantidade de movimento linear,

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} \right] = \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g}$$

Navier-Stokes para Escoamento Incompressível

A equação de Navier-Stokes para escoamento incompressível

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} \right] = \text{div} \left[-p \mathbf{1} + \mu \left[\text{grad} \mathbf{v} + (\text{grad} \mathbf{v})^T \right] \right] + \rho \mathbf{g}$$

para, $\text{div} (\text{grad} \mathbf{v})^T = \text{grad} (\text{div} \mathbf{v})$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} \right] = -\text{grad} p + \text{div} [\mu (\text{grad} \mathbf{v})] + \rho \mathbf{g}$$

Coordenadas Cartesianas Retangulares

Para escoamento incompressível com viscosidade constante, escrevendo Navier-Stokes em sistema cartesiano retangular, tem-se

$$\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \rho g_y$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Coordenadas Cilíndricas

Para escoamento incompressível com viscosidade constante, escrevendo Navier-Stokes em sistema cilíndrico de coordenadas, tem-se

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad & \rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] = \\ & - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \\ \\ \rightarrow \quad & \rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] = \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \\ \\ \rightarrow \quad & \rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = \\ & - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \end{aligned}$$

Adimensionalizando Navier-Stokes

Definindo-se L , U e p_0 como o comprimento, a velocidade e a pressão de referência, tem-se como quantidades adimensionais:

$$\tau = \frac{tU}{L}$$

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad Z = \frac{z}{L}$$

$$V_x = \frac{v_x}{U}, \quad V_y = \frac{v_y}{U}, \quad V_z = \frac{v_z}{U}$$

$$P = \frac{p}{p_0} = \frac{p}{\rho U^2}$$

Adimensionalizando Navier-Stokes

$$\frac{\partial V_x}{\partial \tau} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial X} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial Y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial Z} = -\frac{p_0}{\rho U^2} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\mu}{\rho UL} \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Z^2} \right] + \frac{g_x}{LU^2}$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial \tau} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial X} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial Y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial Z} = -\frac{p_0}{\rho U^2} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\mu}{\rho UL} \left[\frac{\partial^2 V_y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial Z^2} \right] + \frac{g_y}{LU^2}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial \tau} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial X} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial Y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial Z} = -\frac{p_0}{\rho U^2} \frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\mu}{\rho UL} \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial Z^2} \right] + \frac{g_z}{LU^2}$$

Formulações adimensionais é o ponto de partida em métodos numéricos, frequentemente o único meio de obtenção de soluções

MatLab

Equação de Euler

Para condição de escoamento sem atrito, ou seja, invíscido $\mu = 0$, as equações do movimento são reduzidas,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$$

Creeping Flow - Stokes Flow

O termo $[\text{grad} \mathbf{v}] \mathbf{v}$ é inerentemente não linear e representa um sério entrave para se encontrarem soluções analíticas. Dessa forma, quando número de Reynolds for muito baixo, é usual aproximar equações de Navier-Stokes por

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad } p + \text{div} [\mu (\text{grad} \mathbf{v})] + \rho \mathbf{g}$$

Ao desprezar os termos de inércia, ou seja, os termos advectivos, chama-se tal modelo de creeping flow.

Creeping Flow em Coordenadas Cartesianas Retangulares

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \rho g_y$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Vídeo

Algumas Soluções Exatas

Em regime permanente, as equações da continuidade e de Navier-Stokes não estão sujeitas a condições iniciais, mas estão sujeitas a condições de contorno. São dois os tipos de condições de contorno usualmente empregados:

- Condição de não deslizamento em parte do contorno;
Velocidade da camada do fluido em contato com a superfície sólida é igual à velocidade da própria superfície sólida.
- Tensão prescrita em parte do contorno.
Esta condição envolve um valor atribuído à expressão Tn em parte do contorno, muitas vezes, precrevendo componentes cisalhantes da tensão.

Escoamento de Couette e Hagen-Poiseuilli

"Someone's sitting in the shade today because someone planted a tree a long time ago"

Warren Buffett