Mecânica dos Fluidos
ESTÁTICA DOS FLUIDOS

R. Sobral

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

rodolfo.sobral@cefet-rj.br

CEFET/RJ

Programa do Curso - Avaliação 01

- Fluidos e a hipótese do contínuo
- Estática dos fluidos
- Princípios de conservação e equações do movimento
- Similaridade dinâmica

Hidrostática

Parte da mecânica dos fluidos que estuda os fluidos em repouso, ou seja, velocidade identicamente nula e compressão isotrópica.

Hidrostática

O tensor das tensões de Cauchy é descrito da seguinte forma

$$\boldsymbol{T} = -p\mathbf{1} = \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix}$$

Assim a tensão $\boldsymbol{t}$ é sempre paralela ao vetor normal unitário exterior $\boldsymbol{n}$, ou seja, componentes cisalhantes nulas.

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = -p\mathbf{1}\boldsymbol{n} = -p\boldsymbol{n}$$

CEFET/RJ

Equação Clássica da Hidrostática

A forma local da equação da quantidade de movimento linear é dada por

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + [grad\,\boldsymbol{v}]\,\boldsymbol{v}\right) = div\boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{g}$$

Assim, para um fluido estático, a equação acima se reduz a

$$-grad\,p + \rho\boldsymbol{g} = 0$$

Outra Modelagem

Se num fluido estático há apenas compressão , então as forças de superfície atuando sobre a região Ω é

$$\boldsymbol{F} = \int_{\partial\Omega} -p\boldsymbol{n}dS$$

Para que haja equilíbrio estático $\sum \boldsymbol{F} = 0$,

$$\boldsymbol{F}_{\text{superfícice}} + \boldsymbol{F}_{\text{corpo}} = \int_{\partial\Omega} -p\boldsymbol{n}dS + \int_{\Omega} \rho\boldsymbol{g}dV = 0$$

Equação Clássica da Hidrostática

Sendo f um escalar

$$\int_{\partial\Omega} f\boldsymbol{n}dS = \int_{\Omega} grad\, f\, dV$$

para uma região arbitrária Ω

$$\int_{\Omega} -grad\, p\, dV + \int_{\Omega} \rho\boldsymbol{g}dV = \int_{\Omega} [-grad\, p + \rho\boldsymbol{g}]\, dV = 0$$

Um vez que a região Ω é arbitrária, conclui-se que

$$-grad\, p + \rho\boldsymbol{g} = 0$$

Pseudo Hidrostático

Problemas pseudo estáticos são aqueles no qual o fluido está em movimento de corpo rígido e o tensor tensão é um múltiplo da identidade, de tal forma que a equação governante fica

$$-grad\, p + \rho\left(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}\right) = 0$$

para $\boldsymbol{a}$ o campo de acelerações.

Movimento de corpo rígido:

$$grad\, \boldsymbol{v} = -\left[grad\, \boldsymbol{v}\right]^T$$

Forças sobre Superfícies Submersas em Fluidos Estáticos

A partir da distribuição de pressões num dado fluido em repouso, pode-se calcular a força de superfície exercida por este sobre a fronteira, ou parte dela, sob um corpo submerso.

$$\boldsymbol{F}_{\text{superfície}} = \int_{\partial\Omega} -p\boldsymbol{n}dS$$

O momento de força referente ao ponto (x_A, y_A, z_A) é dado por

$$\boldsymbol{M}_A = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{r} \times (-p\boldsymbol{n})\, dS = \int_{\partial\Omega} -p\,(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n})\, dS$$

no qual o braço de alavanca $\boldsymbol{r}$ é a diferença entre um ponto sobre a superfície de contorno e o ponto em relação ao qual se deseja calcular o momento

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z)\Big|_{\text{superfície}} - (x_A, y_A, z_A)$$

Forças sobre Superfícies Submersas em Fluidos Estáticos

Nos casos onde a condição material e fixa são equivalentes, escreve-se

$$\boldsymbol{F}_{\text{superfície}} = \int_{\partial\Omega} -p\boldsymbol{n}dS = \int_{\Omega} -\left(grad\ p\right) dV$$

e uma vez que

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{n}$$

a representação matricial de $\boldsymbol{A}$ fica

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 0 & -\left(z - z_A\right) & \left(y - y_A\right) \\ \left(z - z_A\right) & 0 & -\left(x - x_A\right) \\ -\left(y - y_A\right) & \left(x - x_A\right) & 0 \end{vmatrix}$$

Forças sobre Superfícies Submersas em Fluidos Estáticos

Reescrevendo-se o momento da força

$$\boldsymbol{M}_A = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{r} \times (-p\boldsymbol{n})\, dS = \int_{\Omega} -div\,(p\boldsymbol{A})\, dV$$

onde o campo $div\,(p\boldsymbol{A})$ é dado por

$$div\,(p\boldsymbol{A}) = \left[-(z - z_A)\frac{\partial p}{\partial y} + (y - y_A)\frac{\partial p}{\partial z}\right]\boldsymbol{i}$$

$$+\left[(z - z_A)\frac{\partial p}{\partial x} + (x - x_A)\frac{\partial p}{\partial z}\right]\boldsymbol{j} + \left[-(y - y_A)\frac{\partial p}{\partial x} + (x - x_A)\frac{\partial p}{\partial y}\right]\boldsymbol{k}$$

Quando a pressão depender apenas da variável z, tem-se que

$$div\,(p\boldsymbol{A}) = \left[(y - y_A)\,\boldsymbol{i} - (x - x_A)\,\boldsymbol{j}\right]\frac{\partial p}{\partial z}$$

Axioma de Arquimedes

O axioma de Arquimedes nada mais é do que uma consequência da equação da estática dos fluidos. Estabelecendo que o peso de um corpo, em flutuação estática, é igual ao peso de fluido por ele deslocado.

Note que todo o corpo flutuante está totalmente submerso, por exemplo na água ou no ar, visto que não temos condição de vácuo

Axioma de Arquimedes

Se um corpo encontra-se em equilíbrio estático, o somatório das forças externas atuando sobre ele é nula.

$$\int_{\partial\Omega} -p\boldsymbol{n}dS + \textbf{Peso do corpo} = 0$$

segundo a estática dos fluidos

$$\int_{\partial\Omega} -p\boldsymbol{n}dS + \int_{\Omega} \rho\boldsymbol{g}dV = 0$$

Axioma de Arquimedes

Levando-se em consideração que toda região ocupada pelo corpo pode ser substituída por um fluido estático (fluido deslocado), conlui-se que

$$\textbf{Peso do corpo} = \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{g} dV$$

Portanto, Arquimedes verificou que para corpos convexos flutuando estaticamente:

$$\textbf{Peso do corpo} = \textbf{Peso do fluido deslocado}$$

$$\textbf{Massa do corpo} = \textbf{Massa do fluido deslocado}$$

Força de Empuxo

A força de empuxo é dada por

$$\textbf{Empuxo} = -\int_{\Omega} \rho \boldsymbol{g} dV$$

Vale ressaltar que a igualdade entre o peso do fluido deslocada e o peso do corpo não garante flutuação estática, uma vez que a posição do corpo pode não ser a de equilíbrio.

"Someone's sitting in the shade today because someone planted a tree a long time ago"

Warren Buffett