

Mecânica dos Fluidos

SIMILARIDADE DINÂMICA

R. Sobral

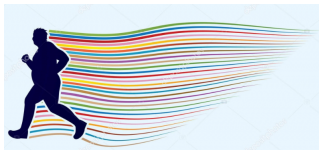
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

rodolfo.sobral@cefet-rj.br

Programa do Curso - Avaliação 01

- Fluidos e a hipótese do contínuo
- Estática dos fluidos
- Princípios de conservação e equações do movimento
- **Similaridade dinâmica**

Similaridade Dinâmica



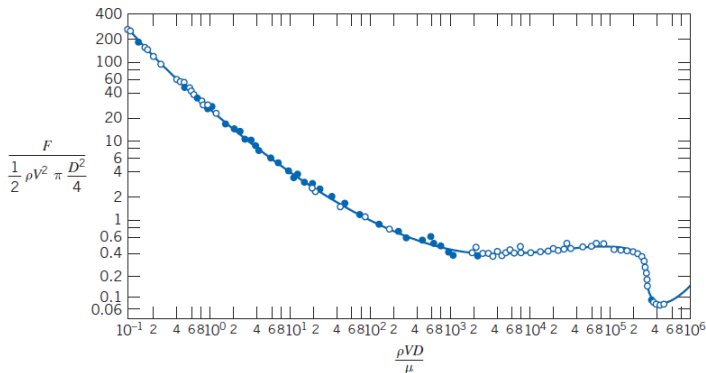
Parâmetros adimensionais podem ser determinados de duas maneiras.

Deduzidos diretamente das equações diferenciais governantes, quando são conhecidas, ou através de parâmetros adimensionais obtidos via análise dimensional sob variáveis envolvidas.

A maioria dos fenômenos da Mecânica dos Fluidos depende de parâmetros geométricos, tipo de escoamento, fluido utilizado, entre outros. E em muitos dos casos, as equações que regem o escoamento são de complexidade tal, tornando-se impossível a obtenção de soluções analíticas.

Análise Dimensional

Daí surge a necessidade do confronto entre resultados experimentais e analíticos obtidos a partir de um modelo físico simplificado da situação real, salientando-se que praticamente todo trabalho experimental é dispendioso e demorado.



Força de Arrasto x Número de Reynolds (μ)

Análise Dimensional

Análise Dimensional – técnica que tem por objetivo o estabelecimento de relações entre variáveis que influenciam um determinado fenômeno físico a ser estudado, obtendo-se o **máximo de informações com um mínimo de experimento possível**.

Análise Dimensional

A análise dimensional é portanto uma forma sistemática de planejar, analisar e apresentar experimentos e dados experimentais relacionados a um determinado fenômeno físico, agrupando variáveis envolvidas em grupos/números adimensionais.

A análise dimensional possibilita também a previsão do comportamento de fenômenos e sistemas reais por meio de resultados experimentais ensaiados em modelos reduzidos, desde que sejam obedecidas todas as condições de semelhança.

$$F = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$F \rightarrow$ grandeza física dependente

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \rightarrow$ variáveis independentes

Teorema dos π 's de Buckingham

Dadas n variáveis que podem ser dimensionalmente em função de m grandezas fundamentais, $(n - k)$ grupos adimensionais independentes podem ser formados, onde k é o posto da matriz formada com as dimensões das n variáveis, sendo o número de grandezas fundamentais independentes.

Teorema dos π 's de Buckingham

$$F = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad \rightarrow \quad \pi = g(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{m-n})$$

$F \rightarrow$ grandeza física dependente

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \rightarrow$ variáveis independentes

$\pi = g(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{m-n}) \rightarrow$ grupos adimensionais

Grupos π 's

- Listar todos os parâmetros envolvidos;
- Selecionar conjunto de dimensões fundamentais;
- Listar as dimensões dos parâmetros referente as dimensões primárias;
- Selecionar da lista, um conjunto de parâmetros dimensionais (r) que inclua todas as dimensões primárias;
- Formar as equações dimensionais, combinando parâmetros selecionados com cada um dos outros parâmetros remanescentes, um de cada vez, a fim de formar grupos adimensionais;
- Certifique-se que cada grupo obtido será adimensional.

Exemplo 01

A queda de pressão, Δp , para escoamento em regime permanente incompressível viscoso através de um tubo retilíneo horizontal, depende do comprimento do tubo L , da velocidade v , da viscosidade do fluido μ , do diâmetro do tubo D , da massa específica do fluido ρ , e da rugosidade média e . Determine um conjunto de grupos adimensionais que possa ser usado para correlacionar dados.

$$\Delta p = f(\rho, \bar{v}, D, \mu, e, L)$$

Exemplo 01

- Variáveis Envolvidas/Dimensionais: $\Delta p, \rho, \bar{v}, D, \mu, e, L \rightarrow n = 7$
- Dimensões Primárias: $M, L, t \rightarrow r = 3$
- Variáveis Repetentes: $v, \rho, D \rightarrow m = r = 3$
- Números de Grupos Adimensionais Primárias: $n - m = 4$

Exemplo 01

$$\pi_1 = \rho^{a_1} v^{a_2} D^{a_3} \cdot \Delta p \rightarrow \left(\frac{M}{L^3}\right)^{a_1} \left(\frac{L}{t}\right)^{a_2} (L)^{a_3} \cdot \left(\frac{M}{Lt^2}\right) = M^0 L^0 t^0$$

$$a_1 + 1 = 0$$

$$-3a_1 + a_2 + a_3 - 1 = 0$$

$$-a_2 - 2 = 0$$

$$a_1 = -1, \quad , a_2 = -2, \quad , a_3 = 0$$

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$$

Exemplo 01

$$\pi_2 = \rho^{b_1} v^{b_2} D^{b_3} \cdot \mu \rightarrow \left(\frac{M}{L^3}\right)^{b_1} \left(\frac{L}{t}\right)^{b_2} (L)^{b_3} \cdot \left(\frac{M}{Lt}\right) = M^0 L^0 t^0$$

$$b_1 + 1 = 0$$

$$-3b_1 + b_2 + b_3 - 1 = 0$$

$$-b_2 - 1 = 0$$

$$b_1 = -1, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = -1$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho v D}$$

Exemplo 01

$$\pi_3 = \rho^{c_1} v^{c_2} D^{c_3} \cdot L \rightarrow \left(\frac{M}{L^3}\right)^{c_1} \left(\frac{L}{t}\right)^{c_2} (L)^{c_3} \cdot (L) = M^0 L^0 t^0$$

$$c_1 = 0$$

$$-3c_1 + c_2 + c_3 + 1 = 0$$

$$-c_2 = 0$$

$$c_1 = 0, \quad , c_2 = 0, \quad , c_3 = -1$$

$$\pi_3 = \frac{L}{D}$$

Exemplo 01

$$\pi_4 = \rho^{d_1} v^{d_2} D^{d_3} \cdot e \rightarrow \left(\frac{M}{L^3}\right)^{d_1} \left(\frac{L}{t}\right)^{d_2} (L)^{d_3} \cdot (L) = M^0 L^0 t^0$$

$$d_1 = 0$$

$$-3d_1 + d_2 + d_3 + 1 = 0$$

$$-d_2 = 0$$

$$d_1 = 0, \quad , d_2 = 0, \quad , d_3 = -1$$

$$\pi_4 = \frac{e}{D}$$

Portanto:

$$\frac{\Delta p}{\rho \bar{v}^2} = \hat{f} \left(\frac{\mu}{\rho \bar{v} D}, \frac{L}{D}, \frac{e}{D} \right)$$

Ponderações

Acima verificou-se que m é igual a r , quase sempre produz o número correto de parâmetros adimensionais π' s. Em alguns casos, surgem dificuldades pois o número de dimensões primárias podem diferir quando as variáveis são expressas em termos de diferentes sistemas de dimensões (MLt ou FLt).

Portanto o valor de m deverá ser obtido via rankeamento da matriz dimensional, ou decorrente do tamanho da maior submatriz quadrada cujo determinante é não-nulo (se todos os determinantes das matrizes de ordem 3, por exemplo, forem nulos, devemos concluir que $m < 3$ e devemos proceder para testes nas matrizes 2×2).

Exemplo 02

Quando um pequeno tubo é imerso em uma poça de líquido, a tensão superficial causa a formação de um menisco na superfície livre, dependendo do ângulo de contato na interface líquido-sólido-gás. Experiências indicam que a magnitude do efeito capilar é uma função do diâmetro do tubo, peso específico do líquido e tensão superficial.

Determine o número de parâmetros π independentes que possam ser formados e obtenha um conjunto.

$$\Delta h = f(D, \gamma, \sigma)$$

Exemplo 02

	Δh	D	γ	σ
M	0	0	1	1
L	1	1	-2	0
t	0	0	-2	-2

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Portanto, o posto da matriz é igual a 2.

Exemplo 02

- Variáveis Envolvidas/Dimensionais: $\Delta h, D, \gamma, \sigma \rightarrow n = 4$
- Dimensões Primárias: $M, L, t \rightarrow r = 3$
- Variáveis Repetentes: $D, \gamma \rightarrow m \neq r = 2$
- Números de Grupos Adimensionais Primárias: $n - m = 2$

Exemplo 02

$$\pi_1 = D^{a_1} \gamma^{a_2} \cdot \Delta h \rightarrow (L)^{a_1} \left(\frac{M}{L^2 t^2} \right)^{a_2} \cdot (L) = M^0 L^0 t^0$$

$$a_2 = 0$$

$$a_1 - 2a_2 + 1 = 0$$

$$-2a_2 = 0$$

$$a_1 = -1, \quad , a_2 = 0$$

$$\pi_1 = \frac{\Delta h}{D}$$

Exemplo 02

$$\pi_2 = D^{a_1} \gamma^{a_2} \cdot \sigma \rightarrow (L)^{a_1} \left(\frac{M}{L^2 t^2} \right)^{a_2} \cdot \left(\frac{M}{t^2} \right) = M^0 L^0 t^0$$

$$a_2 + 1 = 0$$

$$a_1 - 2a_2 = 0$$

$$-2a_2 - 2 = 0$$

$$a_1 = -2, \quad , a_2 = -1$$

$$\pi_2 = \frac{\sigma}{D^2 \gamma}$$

Alguns Grupos Adimensionais

$$Re = \frac{\bar{v}D}{\nu} = \frac{\text{Força Inércia}}{\text{Força Viscosa}}$$

$$Eu = \frac{\Delta p}{1/2\rho v^2} = \frac{\text{Força de Pressão}}{\text{Força Inércia}}$$

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}} = \frac{\text{Força Inércia}}{\text{Força Gravitacional}}$$

$$We = \frac{\rho v^2 L}{\sigma_s} = \frac{\text{Força Inércia}}{\text{Força Tensão Superficial}}$$

$$M = \frac{v}{c} = \frac{\text{Força Inércia}}{\text{Força Compressibilidade}}$$

Demais Grupos Adimensionais

Parameter	Definition	Qualitative ratio of effects	Importance
Reynolds number	$Re = \frac{\rho UL}{\mu}$	$\frac{\text{Inertia}}{\text{Viscosity}}$	Almost always
Mach number	$Ma = \frac{U}{a}$	$\frac{\text{Flow speed}}{\text{Sound speed}}$	Compressible flow
Froude number	$Fr = \frac{U^2}{gL}$	$\frac{\text{Inertia}}{\text{Gravity}}$	Free-surface flow
Weber number	$We = \frac{\rho U^2 L}{\gamma}$	$\frac{\text{Inertia}}{\text{Surface tension}}$	Free-surface flow
Rossby number	$Ro = \frac{U}{\Omega_{\text{rot}} L}$	$\frac{\text{Flow velocity}}{\text{Coriolis effect}}$	Geophysical flows
Cavitation number (Euler number)	$Ca = \frac{p - p_v}{\rho U^2}$	$\frac{\text{Pressure}}{\text{Inertia}}$	Cavitation
Prandtl number	$Pr = \frac{\mu c_p}{k}$	$\frac{\text{Dissipation}}{\text{Conduction}}$	Heat convection
Eckert number	$Ec = \frac{U^2}{c_p T_0}$	$\frac{\text{Kinetic energy}}{\text{Enthalpy}}$	Dissipation
Specific-heat ratio	$k = \frac{c_p}{c_v}$	$\frac{\text{Enthalpy}}{\text{Internal energy}}$	Compressible flow
Strouhal number	$St = \frac{\omega L}{U}$	$\frac{\text{Oscillation}}{\text{Mean speed}}$	Oscillating flow
Roughness ratio	$\frac{\epsilon}{L}$	$\frac{\text{Wall roughness}}{\text{Body length}}$	Turbulent, rough walls
Grashof number	$Gr = \frac{\beta \Delta T g L^3 \rho^2}{\mu^3}$	$\frac{\text{Buoyancy}}{\text{Viscosity}}$	Natural convection
Rayleigh number	$Ra = \frac{\beta \Delta T g L^3 \rho^2 c_p}{\mu k}$	$\frac{\text{Buoyancy}}{\text{Viscosity}}$	Natural convection
Temperature ratio	$\frac{T_w}{T_0}$	$\frac{\text{Wall temperature}}{\text{Stream temperature}}$	Heat transfer
Pressure coefficient	$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2}$	$\frac{\text{Static pressure}}{\text{Dynamic pressure}}$	Aerodynamics, hydrodynamics
Lift coefficient	$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 A}$	$\frac{\text{Lift force}}{\text{Dynamic force}}$	Aerodynamics, hydrodynamics
Drag coefficient	$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A}$	$\frac{\text{Drag force}}{\text{Dynamic force}}$	Aerodynamics, hydrodynamics
Friction factor	$f = \frac{h_f}{(V^2/2g)(L/d)}$	$\frac{\text{Friction head loss}}{\text{Velocity head}}$	Pipe flow
Skin friction coefficient	$c_f = \frac{\tau_{\text{wall}}}{\frac{1}{2} \rho V^2}$	$\frac{\text{Wall shear stress}}{\text{Dynamic pressure}}$	Boundary layer flow

Semelhança

A realização de experimentos em protótipos de tamanho real é por vezes impossível ou de elevado custo, recomendando-se portanto modelos laboratoriais.

Entretanto, os dados experimentais obtidos em laboratório devem retratar com o máximo de fidelidade o que ocorrerá na realidade. A garantia para isso é que haja semelhança entre os escoamentos do modelo e do protótipo.

Condições de semelhança entre dois escoamentos:

- Geométrica
- Cinemática
- Dinâmica

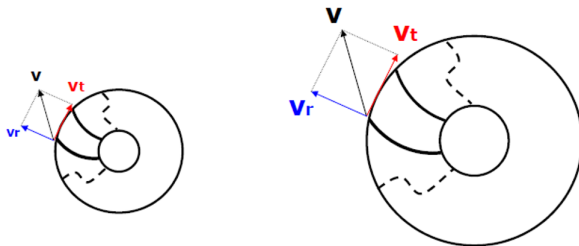
Semelhança Geométrica

Dois escoamentos são **geometricamente semelhantes** quando o modelo e o protótipo apresentam a mesma forma e todas as dimensões lineares do modelo se relacionem em magnitude com as dimensões lineares do protótipo por meio de um fator de escala fixo.



Semelhança Cinemática

Dois escoamentos são cinematicamente semelhantes se as velocidades dos escoamentos no protótipo e no modelo apresentam os mesmos sentido e direção e relacionam-se em módulo por um fator de escala fixo.



Semelhança Dinâmica

Dois escoamentos são **dinamicamente semelhantes** quando as relações entre os diversos tipos de forças que atuam sobre o escoamento do modelo e do protótipo são iguais, isto é, os grupos adimensionais correspondentes assumam os mesmos valores tanto no modelo como no protótipo.

$$(\pi_1)_{\text{protótipo}} = (\pi_1)_{\text{modelo}}$$

$$(\pi_2)_{\text{protótipo}} = (\pi_2)_{\text{modelo}}$$

.

$$(\pi_{m-n})_{\text{protótipo}} = (\pi_{m-n})_{\text{modelo}}$$

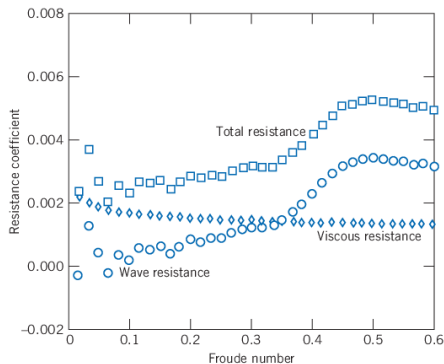
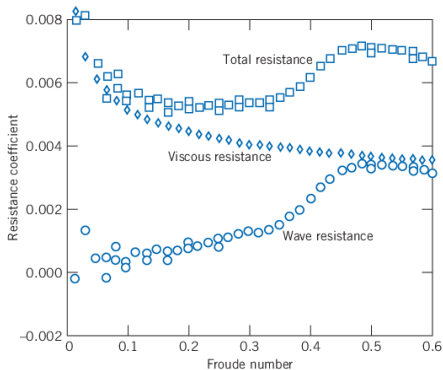
Tal conceito é indispensável para projetar modelos em que os experimentos possam ser realizados para prever as propriedades em escala real.

Semelhança Incompleta

Em alguns casos, a semelhança dinâmica completa entre modelo e protótipo não pode ser obtida, na determinação da força de arrasto sobre um navio, há o atrito do contato da água com o casco (forças viscosas) e a resistência das ondas (forças de gravidade), como não é possível prever esta última resistência analiticamente, tal expressão deve ser obtida via equação constitutiva.

Semelhança Incompleta

Modelo x Protótipo



"Someone's sitting in the shade today because someone planted a tree a long time ago"

Warren Buffett