Mecânica dos Fluidos

INTRODUÇÃO AO ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL

R. Sobral

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

rodolfo.sobral@cefet-rj.br

CEFET/RJ

Programa do Curso - Avaliação 02

- **Escoamento invíscido**
- **Escoamento interno**
- **Escoamento externo**
- **Escoamento compressível**

Escoamento Compressível

Variações significativas ou notáveis na massa específica do fluido.

Assim, como fluidos invíscidos não existem, o mesmo dar-se para escoamentos incompressíveis.

Efeito da Compressibilidade

Consequências da compressibilidade não estão limitadas simplesmente a variações na massa específica. Trabalho de expansão/compressão interfere diretamente no estado termodinâmico do fluido e suas propriedades.

Levando-se em conta que para maioria dos gases sob pressões e temperaturas moderadas, a equação de estado do gás ideal os descreve com baixo erro percentual.

$$p = \rho R T$$

para $R = R_u / M$.

A energia é interna pode ser representada como função do volume específico e da temperatura, $u = u(\nu, T)$.

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{\nu} dT + \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{T} d\nu$$

Termodinâmica

O calor específico a volume constante é definido por $(\partial u/\partial T)_\nu$

$$du = c_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_T d\nu$$

Em particular, para um gás ideal a energia interna u é função apenas da temperatura, logo $(\partial u/\partial \nu)_T = 0$, e

$$du = c_v dT$$

para um gás ideal. Significa que variações de energia interna e temperatura são conhecidas se c_v for conhecido.

$$u = u(T), \qquad c_v = c_v(T)$$

CEFET/RJ

Vide definição de entalpia,

$$h = u + p/\rho$$

para um gás ideal $p = \rho RT$, logo

$$h = u + RT$$

sabendo-se que $u = u(T)$, portanto conclui-se que $h = h(T)$

Segundo relação de Gibbs, para substância simples uma propriedade pode ser definida de duas outras independentes entre si, logo $h = h(p, T)$

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp$$

Termodinâmica

O calor específico a pressão constante é definido por $(\partial h/\partial T)_p$

$$dh = c_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp$$

Em particular, para um gás ideal a energia interna h é função apenas da temperatura, logo $(\partial h/\partial p)_T = 0$, e

$$dh = c_p dT$$

para um gás ideal. Significa que variações da entalpia e temperatura são conhecidas se c_p for conhecido.

$$h = h(T), \qquad c_p = c_p(T)$$

Afim de analisar os calores específicos, tem-se que

$$h = u + RT$$

derivando,

$$dh = du + RdT$$

logo,

$$dh = c_p dT = du + RdT = c_v dT + RdT$$

portanto,

$$c_p - c_v = R$$

A variação de c_p e c_v com a temperatura obedece sempre uma mesma taxa, mantendo diferença sempre constante.

$$k = c_p / c_v$$

$$c_p = \frac{kR}{k-1}$$

$$c_v = \frac{R}{k-1}$$

Diagramas temperatura-entropia são extremamente úteis na análise de escoamentos compressíveis, portanto vale relembrar alguns conceitos

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

Desigualdade de Clausius:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

consequentemente

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$$

Relações de Gibbs são relações combinadas de primeira e segunda lei da termodinâmica

$$Tds = du + pd\nu$$

$$Tds = dh - \nu dp$$

Para gases perfeitos,

$$s_2 - s_1 = c_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R \ln\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + c_p \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

Termodinâmica

Para processos isentrópicos,

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{R/c_v} = 0$$

ou

$$T_2\nu_2^{k-1} = T_1\nu_1^{k-1} = T\nu^{k-1} = \frac{T}{\rho^{k-1}} = \text{constante}$$

portanto,

$$Tp^{(1-k)/k} = \text{constante}$$

portanto, para gases ideais sob processos isentrópicos

$$p\nu^k = \frac{p}{\rho^k} = \text{constante}$$

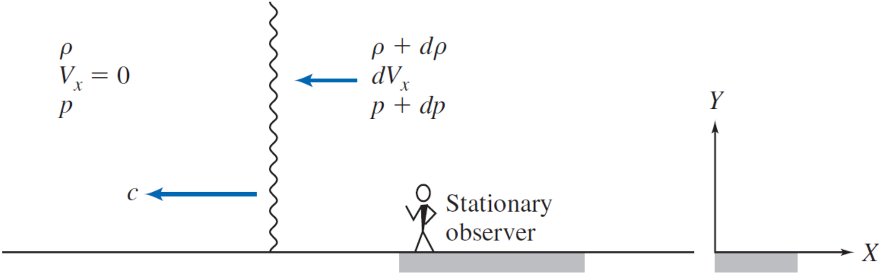
CEFET/RJ

Velocidade do Som

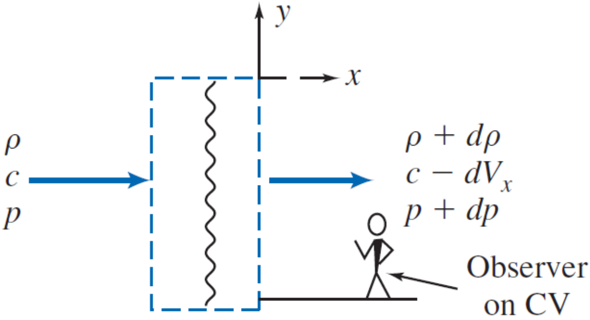
Onda de pressão de intensidade infinitesimal, característica de escoamento compressível.

VÍDEO 01

Propagação de Onda de Som - Onda se Propagando



Propagação de Onda de Som - V.C. Movendo com Onda



Algumas equações serão aplicados sob este V.C. inercial movendo-se com a onda.

Propagação de Onda de Som - V.C. Movendo com Onda

- Equação da Continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho dV + \int_{\partial\Omega}\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{n} dS = 0$$

escoamento permanente e uniforme em cada seção,

$$-\rho c A + \left[\left(\rho + d\rho\right)\left(c - dV_x\right)A\right] = 0$$

realizando a distributiva,

$$dV_x = \frac{c}{\rho} d\rho$$

Propagação de Onda de Som - V.C. Movendo com Onda

- Equação da Quantidade de Movimento

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} v_x \rho dV + \int_{\partial\Omega} v_x \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{n} dS$$

componente da força de corpo nula e regime permanente e força de superfície atuando em x sendo força de pressão,

$$F_{S_x} = pA - (p + dp)\, A = -Adp$$

substituindo na equação básica, tem-se

$$-Adp = c\,(-\rho c A) + (c - dV_x)\,(\rho c A) = (-c + c - dV_x)\,(\rho c A)$$

$$-Adp = -\rho c A dV_x$$

ou

$$dV_x = \frac{1}{\rho c} dp$$

CEFET/RJ

Propagação de Onda de Som - V.C. Movendo com Onda

Combinado continuidade com QM,

$$dV_x = \frac{c}{\rho} d\rho = \frac{1}{\rho c} dp$$

daí

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

indica que a velocidade do som depende de como a pressão e a massa específica do meio estão relacionadas ao escoamento.

Para meio incompressível $d\rho = 0$ para qualquer dp e $c \to 0$, para sólidos e líquidos, cujo massa específica se mantém, tem-se valores de c altos, para gases c são baixos

Onda Sonora

Ondas sonoras sofrem rápida variação infinitesimal de pressão sem tempo para transferência de calor, sendo válido considerar propagação isentrópica.

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho ds = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho$$

de modo que,

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \left.\frac{dp}{d\rho}\right|_s$$

e

$$c = \sqrt{\left.\frac{dp}{d\rho}\right|_s}$$

Velocidade do Som

Para sólidos e líquidos, de módulo de compressibilidade E_v, que é uma medida de como a variação de pressão afeta a variação relativa na massa específica,

$$E_v = \frac{dp}{d\rho/\rho} = \rho\frac{dp}{d\rho}$$

para estes meios,

$$c = \sqrt{E_v/\rho}$$

Velocidade do Som

Para gás ideal, a pressão e massa específica no escoamento isentrópico são relacionadas por,

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constante}$$

Tomando logaritmos e diferenciando,

$$\frac{dp}{p} - k\frac{d\rho}{\rho} = 0$$

Portanto,

$$\left.\frac{dp}{d\rho}\right|_s = k\frac{p}{\rho}$$

como $p/\rho = RT$, daí para um gás ideal

$$c = \sqrt{kRT}$$

Número de Mach

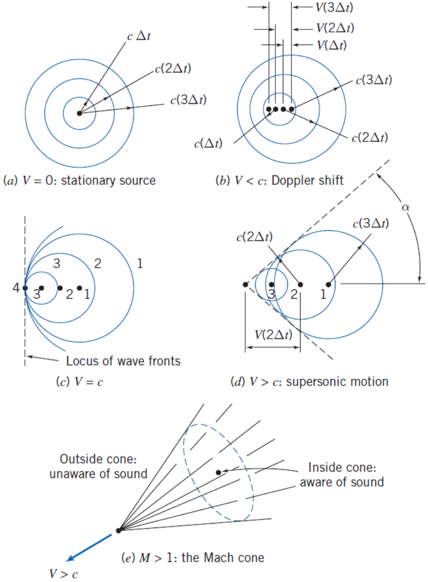
- $M < 1$ Subsônicos
- $M > 1$ Supersônicos
- $0.9 < M < 1.2$ Transônicos
- $M > 5$ Hipersônicos

CEFET/RJ

Cone de Mach

Diferenças qualitativas entre escoamentos subsônico e supersônico podem ser deduzidas mediante fonte sonora simples em movimento.

Cone de Mach



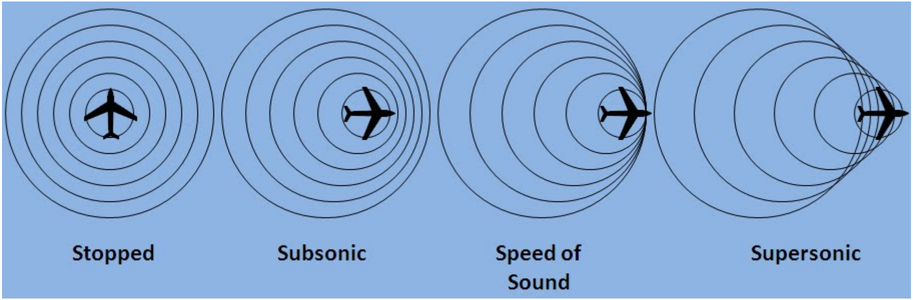
$c\,\Delta t$
$c(2\Delta t)$
$c(3\Delta t)$
(a) $V = 0$: stationary source
$V(3\Delta t)$
$V(2\Delta t)$
$V(\Delta t)$
$c(3\Delta t)$
$c(\Delta t)$
$c(2\Delta t)$
(b) $V < c$: Doppler shift
3
2
1
4
3
2
1
Locus of wave fronts
(c) $V = c$
α
$c(3\Delta t)$
$c(2\Delta t)$
3
2
1
$V(2\Delta t)$
(d) $V > c$: supersonic motion
Outside cone:
unaware of sound
Inside cone:
aware of sound
(e) $M > 1$: the Mach cone
$V > c$

Cone de Mach

Possibilidades de movimento do ponto forte:

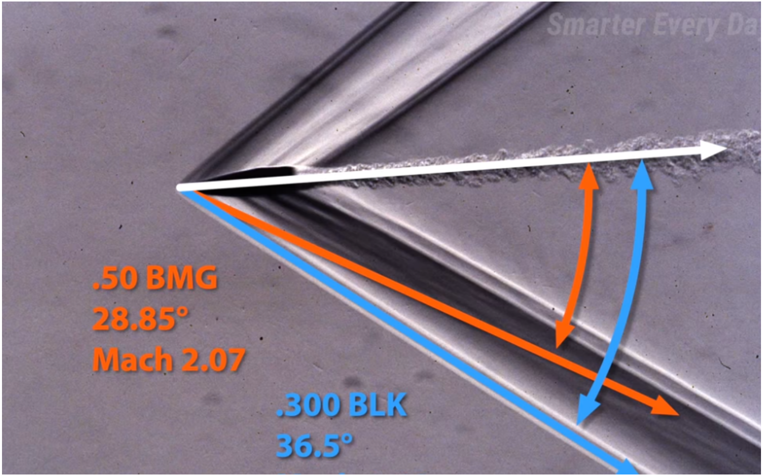
- $v = 0$, Fonte Estacionária
- $0 < v < c$, Efeito Doppler
- $v = c$, Frentes da Onda
- $v > c$, Movimento Supersônico - Cone de Mach

Shock Waves



Shock Waves

Shock Waves



Shock Waves

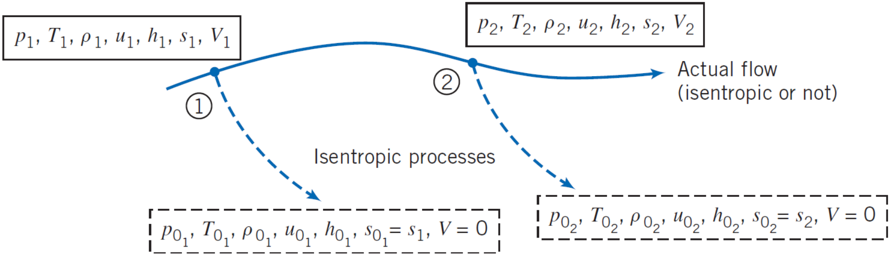
VÍDEO 02

Propriedades de Estagnação

Condição de referência obtida quando o fluido é levado ao repouso $v = 0$, afim de que se possa obter propriedades de referência/estagnação $(p_0, T_0, \rho_0, u_0, h_0, s_0)$.

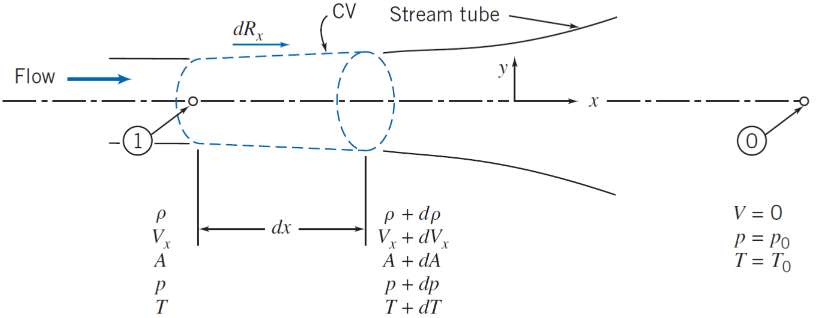
Na prática, adota-se processo isentrópico para modelar condição de estagnação local.

Propriedades de Estagnação



Escoamento incompressíveis adotam Bernoulli na obtenção das propriedades de estagnação isentrópica

Para escoamentos compressíveis, propriedades de estagnação isentrópicas são obtidas aplicando continuidade e QM a um V.C. diferencial.



Propriedades de Estagnação

- Equação da Continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} \rho dV + \int_{\partial\Omega} \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{n} dS = 0$$

escoamento permanente e uniforme em cada seção,

$$-\rho v_x A + \left[\left(\rho + d\rho\right)\left(v_x + dv_x\right)\left(A + dA\right)\right] = 0$$

ou

$$\rho v_x A = \left(\rho + d\rho\right)\left(v_x + dv_x\right)\left(A + dA\right)$$

Propriedades de Estagnação

- Equação da Quantidade de Movimento

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} v_x \rho dV + \int_{\partial\Omega} v_x \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{n} dS$$

componente da força de corpo nula, regime permanente e escoamento invíscido,

$$F_{S_x} = dR_x + pA - (p + dp)(A + dA)$$

a força dR_x aplicada a longo da fronteira do tubo de corrente, onde a pressão média é $p + dp/2$ e a componente na direção x é dA, como não há atrito,

$$F_{S_x} = \left(p + \frac{dp}{2}\right) dA + pA - (p + dp)(A + dA) = -dpA$$

Propriedades de Estagnação

Substituindo F_{S_x} na equação da quantidade de movimento,

$$-dpA = v_x \left(-\rho v_x A\right) + \left(v_x + dv_x\right)\left[\left(p + dp\right)\left(v_x + dv_x\right)\left(A + dA\right)\right]$$

simplificando,

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{v_x^2}{2}\right) = 0$$

Esta relação acima equaciona o processo de desaceleração sem atrito. Para poder integrar até estado final (de estagnação), supondo desaceleração isentrópica para gás ideal $p/\rho^k = \text{cte} = C$.

Propriedades de Estagnação

$$p = C\rho^k \qquad \text{e} \qquad \rho = p^{1/k}C^{-1/k}$$

então

$$-d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{dp}{\rho} = p^{-1/k}C^{1/k}dp$$

integrando

$$-\int_v^0 d\left(\frac{v^2}{2}\right) = C^{1/k}\int_p^{p_0} p^{-1/k}dp$$

uma vez que busca-se a pressão de estagnação,

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{k}\frac{\rho}{p}\frac{v^2}{2}\right]^{(k-1)/k}$$

Propriedades de Estagnação

Para um gás ideal $p = \rho RT$,

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\frac{v^2}{kRT}\right]^{(k-1)/k}$$

e a velocidade sônica sendo $c = \sqrt{kRT}$,

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right]^{(k-1)/k} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{(k-1)/k}$$

A equação acima possibilita o cálculo da pressão local de estagnação vide pressão estática e número de *Mach*.

Propriedades de Estagnação

Portanto para condição de estagnação tem-se,

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]^{(k-1)/k}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]^{1/(k-1)}$$

CEFET/RJ

Condições Críticas

Condições de estagnação são úteis como referência para propriedades termodinâmicas, exceto para velocidade, por definição $v = 0$.

Valor de referência para velocidade é a velocidade crítica, obtida quando um escoamento é acelerado ou desacelerado isentropicamente até $M = 1$.

Asterisco denota condiçoes em $M = 1$

Condições Críticas

Para propriedades de estagnação isentrópica,

$$\frac{p_0}{p^*} = \left[\frac{k+1}{2}\right]^{(k-1)/k}$$

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{k+1}{2}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left[\frac{k+1}{2}\right]^{1/(k-1)}$$

CEFET/RJ

"Someone's sitting in the shade today because someone planted a tree a long time ago"

Warren Buffett