

Mecânica dos Fluidos

ESCOAMENTO INTERNO, VISCOZO E INCOMPRESSÍVEL

R. Sobral

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

rodolfo.sobral@cefet-rj.br

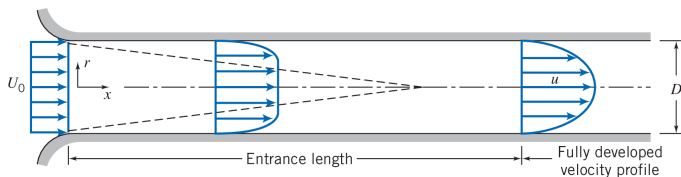
Programa do Curso - Avaliação 02

- Escoamento invíscido
- **Escoamento interno**
- Escoamento externo
- Escoamento compressível

Escoamento Interno

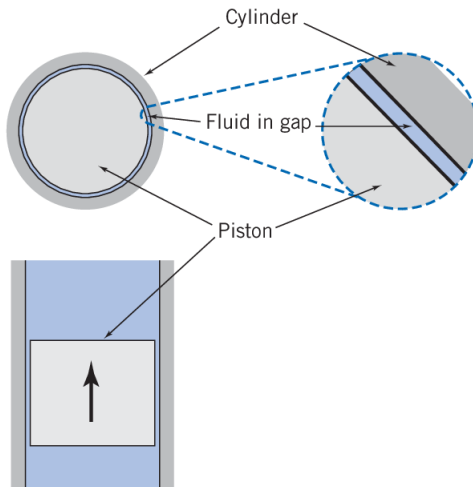
Limitados por superfícies sólidas, em dutos, tubos, bocais, difusores, contrações, expansões, válvulas e acessórios.

Fluxo em um Tubo



Devido a condição de não-deslizamento na parede de tubo, o escoamento laminar de entrada altera seu perfil decorrente a camada limite formada ao longo da parede e condição de velocidade nula. Ressalta-se ainda que, na condição de desenvolvimento completo considera-se perfil de escoamento viscoso em todo o diâmetro de tubo.

Sistema Hidráulico de Alta Pressão - Freio de Automóvel

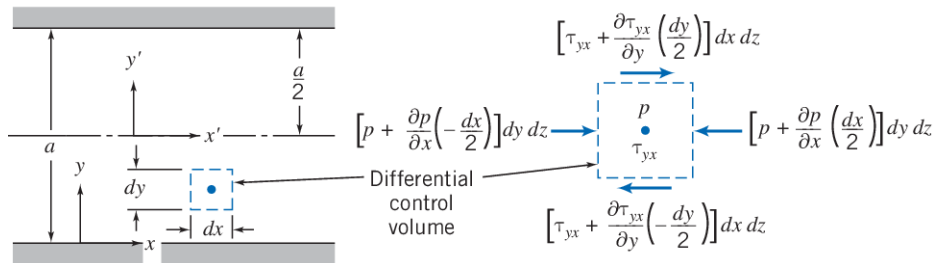


Sabe-se que frequentemente há vazamentos através da folga anular entre um pistão e um cilindro.

Sistema Hidráulico de Alta Pressão - Freio de Automóvel

Para folgas muito pequenas ($< 5 \cdot 10^{-3} mm$) tal campo pode ser modelado como escoamento entre placas paralelas infinitas.

Esc. Laminar C.D - Placas Paralelas Infinitas Estacionárias



Condição de contorno de não-deslizamento impõe que: Em $y = 0$, $u = 0$, e em $y = a$, $u = 0$.

Esc. Laminar C.D - Placas Paralelas Infinitas Estacionárias

Para escoamento completamente desenvolvido somente a pressão pode e irá variar na direção de x , caso nítido de Navier-Stokes utilizando C.C. pré-definidas.

Porém, a seguir será proposta solução não-simplificada via análise de volume de controle diferencial.

QML na componente x :

$$F_{s_x} + F_{b_x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u \rho dV + \int_{\partial\Omega} u \rho v n dS$$

Para escoamento permanente, C.D. e desprezando-se as forças de corpo, principalmente visto que não há forças de massa atuando na direção x , tem-se que:

$$F_{s_x} = 0$$

Esc. Laminar C.D - Placas Paralelas Infinitas Estacionárias

- Forças de Pressão - Laterais

$$dF_L = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz$$

$$dF_R = - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz$$

- Forças Cisalhantes - Inferior e Superior

$$dF_B = - \left(\tau_{yx} - \frac{d\tau_{yx}}{dy} \frac{dy}{2} \right) dx dz$$

$$dF_T = \left(\tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} \frac{dy}{2} \right) dx dz$$

Esc. Laminar C.D - Placas Paralelas Infinitas Estacionárias

Realizando o somatório das forças $F_{s_x} = 0$, tem-se

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d\tau_{yx}}{dy}$$

Válido quando,

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = \frac{\partial p}{\partial x} = cte$$

Integrando,

$$\tau_{yx} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y + c_1$$

Observe que a tensão cisalhante varia linearmente com y

Esc. Laminar C.D - Placas Paralelas Infinitas Estacionárias

Para fluidos newtonianos, a tensão cisalhante varia linearmente com taxa de deformação

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}$$

logo,

$$\mu \frac{du}{dy} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y + c_1$$

Integrando, tem-se o perfil de velocidades

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + \frac{c_1}{\mu} y + c_2$$

Esc. Laminar C.D - Placas Paralelas Infinitas Estacionárias

Utilizando-se as C.C:

- $y = 0 \rightarrow u = 0$
- $y = a \rightarrow u = 0$

Então,

$$0 = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) a^2 + \frac{c_1}{\mu} a$$

logo

$$c_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) a$$

Finalmente, perfil de velocidades é descrito como

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) ay = \frac{a^2}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left[\left(\frac{y}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{a} \right) \right]$$

Esc. Laminar C.D - Placas Paralelas Infinitas Estacionárias

- Tensão de Cisalhamento

$$\tau_{yx} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y + c_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) a = a \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left[\frac{y}{a} - \frac{1}{2} \right]$$

- Vazão Volumétrica

$$Q = \int_S v n dS$$

Para profundidade l na direção z

$$Q = \int_0^a u l dy \quad \text{ou} \quad \frac{Q}{l} = \int_0^a \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - ay) dy$$

Então, a vazão volumétrica por unidade de profundidade é

$$\frac{Q}{l} = -\frac{1}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) a^3$$

Esc. Laminar C.D - Placas Paralelas Infinitas Estacionárias

- Vazão Volumétrica em função da queda de Pressão

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{L} = -\frac{\Delta p}{L}$$

Substituindo na expressão para vazão volumétrica

$$\frac{Q}{l} = -\frac{1}{12\mu} \left[-\frac{\Delta p}{L} \right] a^3 = \frac{a^3 \Delta p}{12\mu L}$$

- Velocidade Média

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = -\frac{1}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{a^3 l}{la} = -\frac{1}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) a^2$$

Esc. Laminar C.D - Placas Paralelas Infinitas Estacionárias

- Velocidade Máxima

$$\frac{du}{dy} = \frac{a^2}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left[\frac{2y}{a^2} - \frac{1}{a} \right]$$

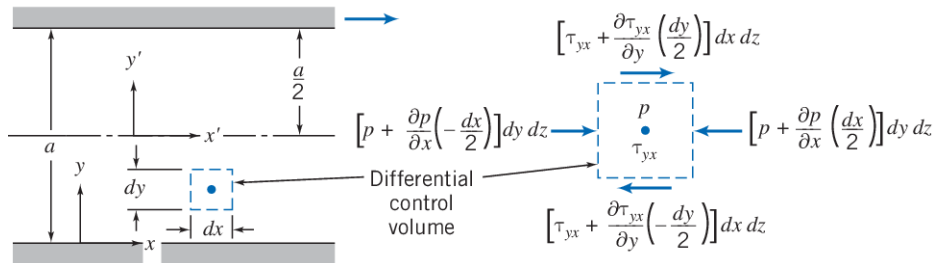
Então,

$$\frac{du}{dy} = 0 \quad \text{em} \quad y = \frac{a}{2}$$

Em

$$y = \frac{a}{2}, \quad u = u_{\text{máx}} = -\frac{1}{8\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) a^2 = \frac{3}{2} \bar{v}$$

Esc. Laminar C.D - Placa Superior com Velocidade U



Condições de contorno: Em $y = 0$, $u = 0$, e em $y = a$, $u = U$.

Esc. Laminar C.D - Placa Superior com Velocidade U

Nesta nova situação as C.C. são:

- $y = 0 \rightarrow u = 0$
- $y = a \rightarrow u = U$

Portanto, o perfil de velocidades é descrito como

$$u = \frac{Uy}{a} + \frac{a^2}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left[\left(\frac{y}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{a} \right) \right]$$

Esc. Laminar C.D - Placa Superior com Velocidade U

- Tensão de Cisalhamento

$$\tau_{yx} = \mu \frac{U}{a} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left[\frac{2y}{a^2} - \frac{1}{a} \right] = \mu \frac{U}{a} + a \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left[\frac{y}{a} - \frac{1}{2} \right]$$

- Vazão Volumétrica

$$Q = \int_S v n dS$$

Para profundidade l na direção z

$$Q = \int_0^a ul \, dy \quad \text{ou} \quad \frac{Q}{l} = \int_0^a \left[\frac{Uy}{a} + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - ay) \right] dy$$

Então, a vazão volumétrica por unidade de profundidade é

$$\frac{Q}{l} = \frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) a^3$$

Esc. Laminar C.D - Placa Superior com Velocidade U

- Velocidade Média

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{a} \left[\frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) a^3 \right] = \frac{U}{2} - \frac{1}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) a^2$$

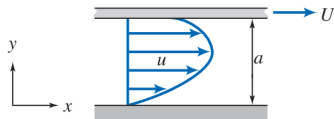
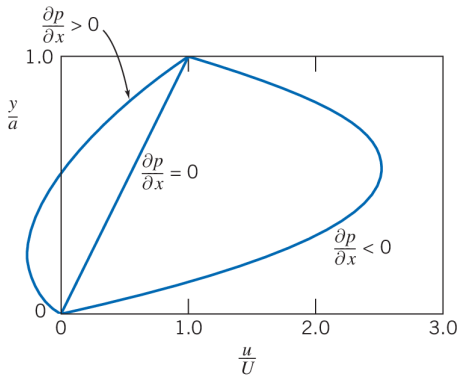
- Velocidade Máxima

$$\frac{du}{dy} = \frac{U}{a} + \frac{a^2}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left[\frac{2y}{a^2} - \frac{1}{a} \right] = \frac{U}{a} + \frac{a}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left[2 \left(\frac{y}{a} \right) - 1 \right]$$

Então,

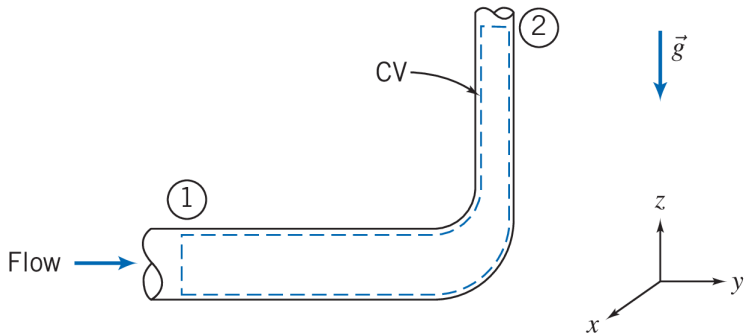
$$\frac{du}{dy} = 0 \quad \text{em} \quad y = \frac{a}{2} - \frac{U/a}{(1/\mu)(\partial p/\partial x)}$$

Esc. Laminar C.D - Placa Superior com Velocidade U



Perfil de velocidade adimensional para esc. laminar C.D entre placas paralelas infinitas com placa superior movendo-se com vel. constante U

Equação da Energia em Tubos



Equação da Energia em Tubos

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{cisalhante}} - \dot{W}_{\text{outro}} = \frac{d}{dt} \int_R \rho e dV + \int_{\partial R} \rho \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

Sendo,

$$e = u + \frac{v^2}{2} + gz$$

e considerando:

- escoamento em regime permanente;
- ausência de forças cisalhantes;
- ausência de trabalho de fronteira;
- ausência de outros tipo de forças;
- energia interna e pressão uniformes em cada seção;
- escoamento incompressível;

Equação da Energia em Tubos

A primeira lei da termodinâmica se reduz a:

$$\dot{Q} = \dot{m}(u_2 - u_1) + \dot{m} \left(\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} \right) + \dot{m}g(z_2 - z_1) + \int_{A_2} \frac{v_2^2}{2} \rho v_2 dA_2 - \int_{A_1} \frac{v_1^2}{2} \rho v_1 dA_1$$

Não considerou-se velocidade uniforme nas seções, pois para escoamentos viscosos tal realidade não se aplica. Porém, faz-se usual uma definição vide velocidade média a fim de eliminar as integrais.

Equação da Energia em Tubos

- Coeficiente de Energia Cinética

$$\int_A \frac{v^2}{2} \rho v dA = \alpha \int_A \frac{\bar{v}^2}{2} \rho v dA = \alpha \dot{m} \frac{\bar{v}^2}{2}$$

ou

$$\alpha = \frac{\int_A \rho v^3 dA}{\dot{m} \bar{v}^2}$$

Valor de α é tido como fator de correção na substituição pela velocidade média. Escoamento laminar $\alpha = 2$ e turbulento $\alpha = 1$.

Equação da Energia em Tubos

- Perda de Carga

A primeira lei da termodinâmica se reduz a:

$$\dot{Q} = \dot{m}(u_2 - u_1) + \dot{m}\left(\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho}\right) + \dot{m}g(z_2 - z_1) + \dot{m}\left(\frac{\alpha_2 v_2^2}{2} - \frac{\alpha_1 v_1^2}{2}\right)$$

como

$$\dot{Q} = \frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta Q}{dm} \frac{dm}{dt} = \frac{\delta Q}{dm} \dot{m}$$

dividindo por $\dot{m}$

$$\left(\frac{\delta Q}{dm}\right) = \left[-\left(u_1 + \frac{\alpha_1 \bar{v}_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho}\right) + \left(u_2 + \frac{\alpha_2 \bar{v}_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}\right)\right]$$

Equação da Energia em Tubos

Portanto,

$$\left(u_1 - u_2 + \frac{\delta Q}{dm}\right) = \left[-\left(\frac{\alpha_1 \bar{v}_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho}\right) + \left(\frac{\alpha_2 \bar{v}_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}\right)\right]$$

o termo a seguir representa a energia mecânica por unidade de massa na seção transversal

$$\left(\frac{\alpha \bar{v}^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right)$$

Portanto a perda de carga total fica

$$\left(\frac{\alpha_1 \bar{v}_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho}\right) - \left(\frac{\alpha_2 \bar{v}_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}\right) = h_{l_T}$$

Para escoamentos C.D em tubos horizontais,

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{\Delta p}{2} = h_{l_T}$$

Perda de Carga Distribuída e Localizada

$$h_{1-2} = h_{1-2}^D + h_{1-2}^L$$

Perda de Carga

Como já foi explicitado anteriormente...

Perda de Carga

Na literatura clássica, a perda de carga é obtida a partir da equação de Darcy-Weisbach, dada por

$$\Delta e = f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2}$$

sendo f fator de atrito.

Perda de Carga

No caso de escoamento laminar num duto circular, o fator de atrito pode ser calculado analiticamente igualando as expressões já mencionadas acima,

$$\Delta e = f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2} = \frac{8\mu L}{\rho R^2} \bar{v}$$

$$f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2} = \frac{64}{\left(\frac{\rho \bar{v} D}{\mu}\right)} \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2}$$

$$f = \frac{64}{Re}$$

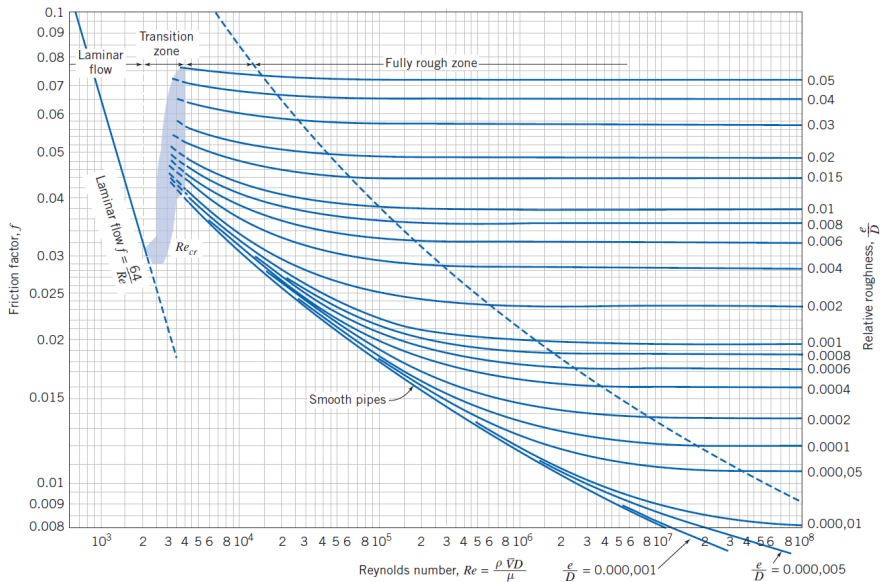
Perda de Carga

No caso de escoamento turbulento através de tubo liso, ou seja, com parede interna com rugosidade desprezível, o fator de atrito é aproximadamente dado por

$$f = \frac{23}{4} (\ln Re)^{-\frac{26}{11}}$$

Para dutos com rugosidade não desprezível, o fator de atrito dependerá da rugosidade relativa e do número de Reynolds, devendo ser obtido diretamente via ábaco de Moody.

Ábaco de Moody



Perda de Carga Localizada

Devido aos acidentes geométricos e acessórios de tubulação.

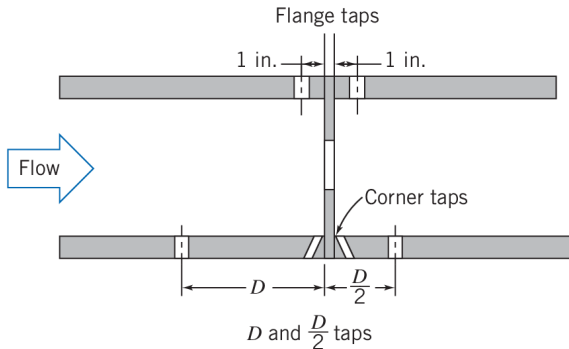
$$h_{1-2}^L = K \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

sendo K coeficiente de perda de carga localizada. Alguns autores utilizam o conceito de comprimento equivalente da tubulação (L_e)

$$K = f \frac{L_e}{D}$$

Medidores de Vazão

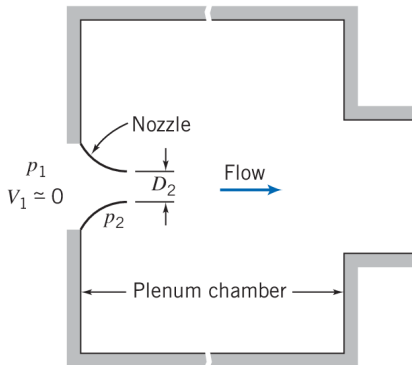
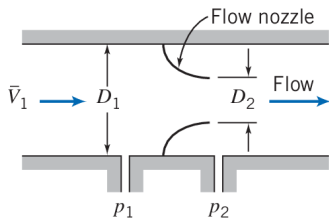
- Placa de Orifício



Geometria de orifício e tomadas de pressão

Medidores de Vazão

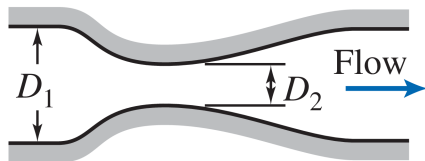
- Bocal



Instalações em duto e pleno

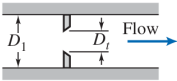
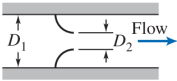
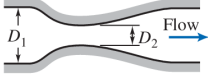
Medidores de Vazão

- Venturi



Medidores de Vazão

- Características Gerais

Flow Meter Type	Diagram	Head Loss	Initial Cost
Orifice		High	Low
Flow Nozzle		Intermediate	Intermediate
Venturi		Low	High

"Someone's sitting in the shade today because someone planted a tree a long time ago"

Warren Buffett