

# Mecânica dos Fluidos

## ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL DE FLUIDOS INVÍSCIDOS

R. Sobral

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

[rodolfo.sobral@cefet-rj.br](mailto:rodolfo.sobral@cefet-rj.br)

## Programa do Curso - Avaliação 02

- **Escoamento invíscido**
- Escoamento interno
- Escoamento externo
- Escoamento compressível

# Escoamento Incompressível

Vide equação da continuidade na formulação local

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$$

quando  $\rho = \text{constante}$ , tem-se que

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

# Escoamento Invíscido

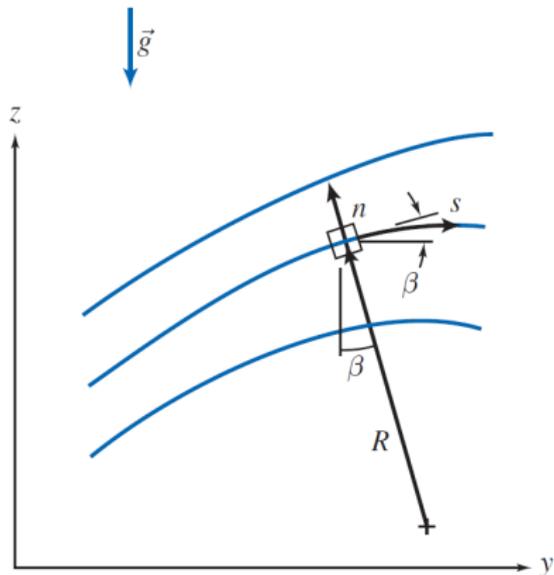
Embora não existam fluidos reais sem viscosidade, muitos problemas de escoamento, especialmente em aerodinâmica, podem ser analisados mediante  $\mu = 0$ .

# Equação de Euler

Para condição de escoamento sem atrito, ou seja, invíscido  $\mu = 0$ , as equações do movimento são reduzidas,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$$

# Equação de Euler em Linhas de Corrente



$$\begin{aligned}
 & \left[ p + \frac{\partial p}{\partial n} \frac{dn}{2} \right] ds \, dx \\
 & \left[ p + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} \right] dn \, dx \\
 & \left[ p - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} \right] dn \, dx \\
 & \left[ p - \frac{\partial p}{\partial n} \frac{dn}{2} \right] ds \, dx
 \end{aligned}$$

# Equação de Euler em Linhas de Corrente

As equações do movimento em função de  $s$  e  $n$ , sendo:

- $s$  → distância ao longo da L.C.
- $n$  → distância normal a L.C.
- $p$  → pressão no centro do elemento.

## Equação de Euler em Linhas de Corrente - em $s$

Aplicando-se a segunda lei de Newton na direção de  $s$ , desprezando-se as forças viscosas:

$$\left( p - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) dndx - \left( p + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) dndx - \rho g \sin \beta dsdndx = \rho a_s dsdndx$$

simplificando a equação, fica:

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \sin \beta = \rho a_s$$

## Equação de Euler em Linhas de Corrente - em $s$

Substituindo,  $\sin \beta = \frac{\partial z}{\partial s}$  e dividindo ambos os lados por  $\rho$ :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = a_s$$

e como  $a_s = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} v$ , a equação de Euler na direção da linha de corrente fica:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} v$$

## Equação de Euler em Linhas de Corrente - em $s$

Para escoamento permanente e desprezando forças de corpo, tem-se para equação de Euler na direção da L.C.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial s} v$$

Constata-se que em condições cuja única força é de pressão, há aceleração nas regiões de baixa pressão e desaceleração em regiões de alta pressão.

## Equação de Euler em Linhas de Corrente - em $n$

Aplicando-se a segunda lei de Newton na direção de  $n$ , desprezando-se as forças viscosas:

$$\left( p - \frac{\partial p}{\partial n} \frac{dn}{2} \right) ds dx - \left( p + \frac{\partial p}{\partial n} \frac{dn}{2} \right) ds dx - \rho g \cos \beta dn dx ds = \rho a_n dn dx ds$$

simplificando a equação, fica:

$$-\frac{\partial p}{\partial n} - \rho g \cos \beta = \rho a_n$$

## Equação de Euler em Linhas de Corrente - em $n$

Substituindo,  $\cos \beta = \frac{\partial z}{\partial n}$  e dividindo ambos os lados por  $\rho$ :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - g \frac{\partial z}{\partial n} = a_n$$

e como a aceleração centrípeta vale  $a_n = -\frac{v^2}{R}$ , a equação de Euler na direção normal a linha de corrente fica:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + g \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{v^2}{R}$$

## Equação de Euler em Linhas de Corrente - em $n$

Para escoamento permanente em um plano horizontal a equação de Euler normal a L.C. fica,

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right) = \frac{v^2}{R}$$

Constata-se que a pressão aumenta para fora na direção normal às L.C..

## Equação de Bernoulli - Integração de Euler ao longo da L.C.

Como visto anteriormente, a equação de Euler para escoamento incompressível na direção da linha de corrente é dada por:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} v$$

em regime permanente,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial s} v$$

## Equação de Bernoulli - Integração de Euler ao longo da L.C.

Se uma partícula fluida desloca-se uma distância,  $ds$ , ao longo de uma linha de corrente então,

$$\frac{\partial p}{\partial s} ds = dp \quad \rightarrow \quad \text{variação de pressão em } s$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} ds = dz \quad \rightarrow \quad \text{variação de elevação em } s$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} ds = dv \quad \rightarrow \quad \text{variação de velocidade em } s$$

## Equação de Bernoulli - Integração de Euler ao longo da L.C.

Utilizando os termos referentes ao deslocamentos sob as L.C. e substituindo-os em Euler em regime permanente, fica

$$-\frac{dp}{\rho} - gdz = vdv$$

ao longo de  $s$

$$\frac{dp}{\rho} + vdv + gdz = 0$$

integrando,

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = 0$$

## Equação de Bernoulli - Limitações

- Tubos longos (Atrito - efeitos viscosos);
- Difusores (Aumento da camada limite - efeitos viscosos);
- escoamentos externos (Unidimensionalidade - afastamento da L.C.);
- Máquinas de Fluxo (Afastamento da L.C.);
- escoamentos compressíveis ( $\rho \neq cte$ );
- Variações de temperatura (Causam variações de  $\rho$ ).

# Pressões Estática, de Estagnação e Dinâmica

Imagine o vento soprando contra a palma de sua mão em regime permanente, a pressão estática será a pressão atmosférica, a pressão maior que você sentirá no centro da palma da sua mão será a pressão de estagnação e o acréscimo de pressão referente a atmosférica será a pressão dinâmica.

# Pressões Estática, de Estagnação e Dinâmica

A pressão de estagnação é igual a pressão estática mais a pressão dinâmica.

Se a pressão estática é  $p$  em um ponto do escoamento onde velocidade é  $v$ , então a pressão de estagnação  $p_0$  onde a velocidade de estagnação  $v_0$  é nula, pode ser obtida como:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

como  $v_0$  é nula,

$$p_0 = p + \frac{\rho v^2}{2}$$

- Pressão Estática → denominada de pressão termodinâmica é a pressão convencional adotada pela partícula fluida em movimento.
- Pressão de Estagnação → obtida quando um fluido em escoamento é desacelerado até a velocidade nula por meio de processo sem atrito.
- Pressão Dinâmica → representada pelo termo  $\frac{\rho v^2}{2}$ .

# Pressões Estática, de Estagnação e Dinâmica

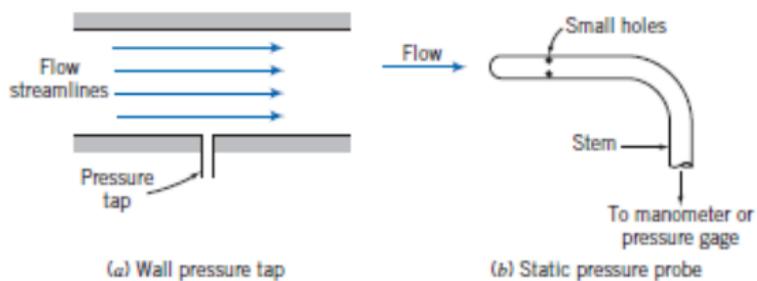
Como,

$$p_0 = p + \frac{\rho v^2}{2}$$

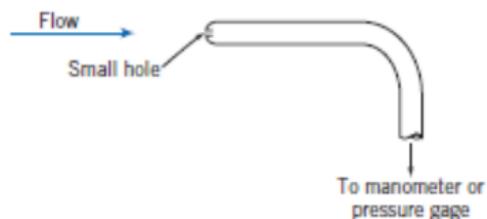
se a pressão de estagnação e a pressão estática puderem ser medidas em um ponto, tem-se o valor exato da velocidade local do escoamento,

$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}$$

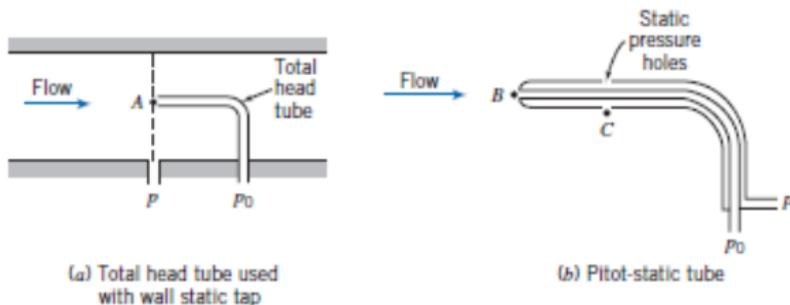
# Pressão Estática



# Pressão de Estagnação

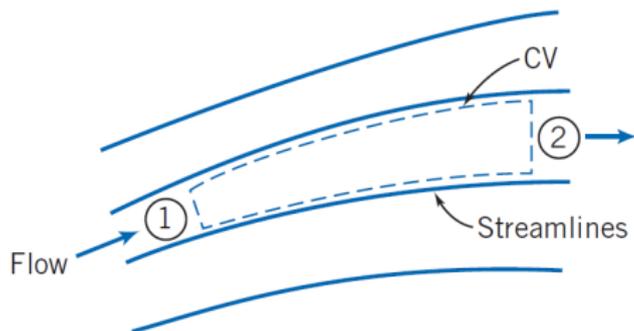


# Pressões Estática e de Estagnação



Vale ressaltar que tais conceitos de Bernoulli para pressões referem-se a aplicações em escoamentos incompressíveis  $M < .3$ , não se aplicando a escoamentos compressíveis

# VC Limitado por Linhas de Corrente - Tubo de Corrente



# Equação de Bernoulli - Equação da Energia

A primeira lei da termodinâmica representada por:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{cisalhante}} - \dot{W}_{\text{outro}} = \frac{d}{dt} \int_R \rho e dV + \int_{\partial R} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

Sendo,

$$e = u + \frac{v^2}{2} + gz$$

e considerando:

- escoamento em regime permanente;
- ausência de forças cisalhantes;
- ausência de trabalho de fronteira;
- ausência de outros tipo de forças;
- escoamento e propriedades uniformes em cada seção;
- escoamento incompressível;
- Sem variação de energia interna e fluxo de calor.

## Equação de Bernoulli - Equação da Energia

A primeira lei da termodinâmica se reduz a:

$$\dot{Q} = \left( u_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) (-\rho_1 v_1 A_1) + \left( u_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) (\rho_2 v_2 A_2)$$

Vide equação da continuidade,

$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

e

$$\dot{Q} = \frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta Q}{dm} \frac{dm}{dt} = \frac{\delta Q}{dm} \dot{m}$$

## Equação de Bernoulli - Equação da Energia

Portanto,

$$\left(\frac{\delta Q}{dm}\right) \dot{m} = \left[ - \left( u_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) + \left( u_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) \right] \dot{m}$$

dividindo por  $\dot{m}$ ,

$$\left( u_1 - u_2 + \frac{\delta Q}{dm} \right) = \left[ - \left( \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) + \left( \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) \right]$$

Para escoamento incompressível,

$$\left( u_1 - u_2 + \frac{\delta Q}{dm} \right) = \left[ - \left( \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) + \left( \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) \right]$$

daí,

$$\left( \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) = \left( \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) + \left( u_2 - u_1 - \frac{\delta Q}{dm} \right)$$

# Equação de Bernoulli - Equação da Energia

Considerando,

$$\left( u_2 - u_1 - \frac{\delta Q}{dm} \right) = 0$$

tem-se que

$$\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}$$

logo,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = cte$$

# Linha de Energia e Piezométrica

Como apresentado a priori, para escoamento permanente, incompressível sem atrito ao longo de uma linha de corrente tem-se que a energia mecânica se conserva.

# Linha de Energia e Piezométrica

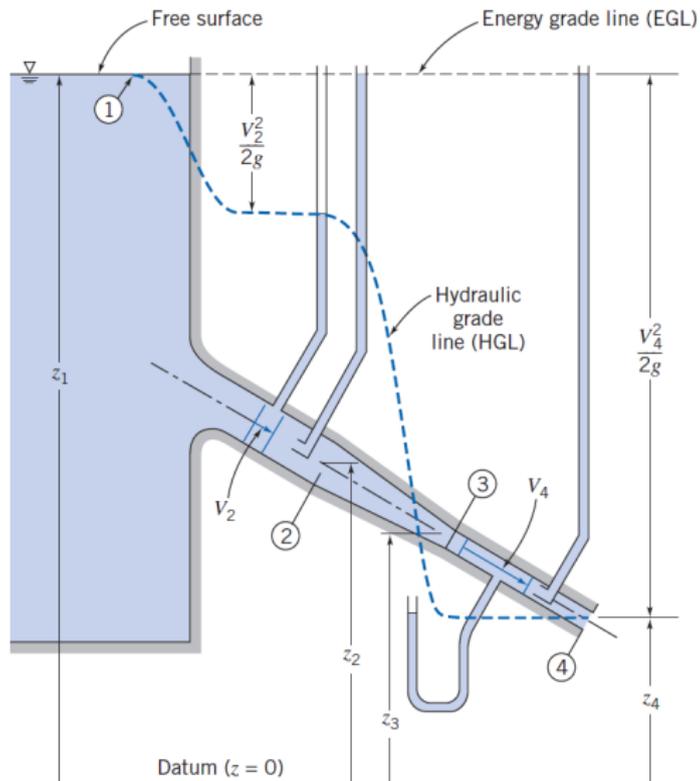
$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = H = cte$$

- $\frac{p}{\rho g}$  → altura de carga devido à pressão estática local, ou seja, energia de pressão por unidade de peso;
- $\frac{v^2}{2g}$  → altura de carga devido à pressão dinâmica local, ou seja, energia de cinética por unidade de peso;
- $z$  → altura de carga de elevação, ou seja, energia potencial por unidade de peso;
- $H$  → altura de carga total do escoamento, ou seja, energia mecânica total por unidade de peso do fluido em escoamento.

# Linha de Energia e Piezométrica

- Linha de energia → representa a altura de carga total;
- Linha piezométrica → representa a soma das alturas de carga devido à elevação/pressão hidrostática e à pressão estática ( $z + p/\rho g$ ).

# Linha de Energia e Piezométrica - Escoamento Sem Atrito



## Bernoulli Escoamento Transiente - Integração de Euler L.C.

A equação da quantidade de movimento para escoamento sem atrito,

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} - g\mathbf{k}$$

Ao longo da linha de corrente converte-se componentes vetoriais em escalares, tomando o produto escalar por  $ds$ , tais como,

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot ds = \frac{Dv}{Dt} \cdot ds = \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} v \right) ds = -\frac{\nabla p}{\rho} \cdot ds - g\mathbf{k} \cdot ds$$

# Bernoulli Escoamento Transiente - Integração de Euler L.C.

$$\frac{\partial v}{\partial s} ds = dv \quad \rightarrow \quad \text{variação de velocidade em } s$$

$$\nabla p \cdot ds = dp \quad \rightarrow \quad \text{variação da pressão em } s$$

$$k \cdot ds = dz \quad \rightarrow \quad \text{variação de } z \text{ em } s$$

## Bernoulli Escoamento Transiente - Integração de Euler L.C.

Utilizando os termos referentes ao deslocamentos sob as L.C. e substituindo-os na quantidade de movimento,

$$\frac{\partial v}{\partial t} ds + v dv = -\frac{dp}{\rho} - g dz$$

## Bernoulli Escoamento Transiente - Integração de Euler L.C.

Integrando ao longo de uma linha de corrente de um ponto 1 ao ponto 2,

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = 0$$

Para escoamento incompressível,

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = 0$$

Escoamento incompressível, sem atrito ao longo de uma L.C.

# Escoamento Irrotacional

Escoamentos nos quais as partículas de fluido não possuem rotação  $w = 0$ .

Tensões de cisalhamento são responsáveis por rotação, escoamentos inviscídeos são irrotacionais, a menos que as partículas estejam em rotação **inicialmente**.

$$\text{rot}v = \nabla \times v = 0$$

# Escoamento Irrotacional

Em coordenadas cartesianas,

$$\left[ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] = \left[ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] = \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] = 0$$

Em coordenadas cilíndricas,

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] = \left[ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] = 0$$

# Bernoulli Aplicado a Escoamento Irrotacional

Vale ressaltar que a equação de Bernoulli tem validade apenas para uma mesma linha de corrente, para que haja garantia na aplicação entre dois pontos quaisquer do escoamento deve-se comprovar condição de irrotacionalidade do escoamento.

# Bernoulli Aplicado a Escoamento Irrotacional

Reescrevendo a equação de Euler,

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - g\mathbf{k}$$

Utilizando a identidade vetorial,

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

# Bernoulli Aplicado a Escoamento Irrotacional

Para escoamento irrotacional  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ , portanto

$$\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = -\frac{\nabla p}{\rho} - g\mathbf{k}$$

## Bernoulli Aplicado a Escoamento Irrotacional

Considerando deslocamento em campo de escoamento da posição  $(\mathbf{r})$  para a posição  $(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$ , tomando o produto  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ , tem-se que

$$\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\cdot d\mathbf{r} = -\frac{\nabla p}{\rho}\cdot d\mathbf{r} - g\mathbf{k}\cdot d\mathbf{r}$$

portanto,

$$\frac{1}{2}d(v^2) = -\frac{dp}{\rho} - gdz$$

ou

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}d(v^2) + gdz = 0$$

# Bernoulli Aplicado a Escoamento Irrotacional

Integrando,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = cte$$

como  $dr$  foi um deslocamento arbitrário, a equação acima é válida entre dois pontos quaisquer.

Escoamento em regime permanente, incompressível, viscoso e que seja também irrotacional.

# Potencial de Velocidade

Para escoamento irrotacional surge uma função auxiliar denominada função potencial  $\phi$ .

$$\mathbf{v} = -\nabla\phi$$

Oriunda da operação,

$$\nabla \times \mathbf{v} = -\nabla \times \nabla\phi = -rot(\text{grad}\phi) \equiv 0$$

Assim,

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

a condição de irrotacionalidade é satisfeita  $rot\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = 0$ .

# Potencial de Velocidade

Em coordenadas cilíndricas ,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

e

$$v_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad v_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

como  $\nabla \times \nabla \phi \equiv 0$  para todo  $\phi$ , o potencial de velocidade existirá somente para escoamentos irrotacionais.

Como em escoamento irrotacional o campo de velocidade pode ser definido pela função potencial  $\phi$ , a teoria é frequentemente referida como teoria do escoamento potencial.

## Função de Corrente e Potencial de Velocidade - Laplace

Para escoamento bidimensional, incompressível, e irrotacional, as componentes da velocidade referentes as funções são,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

e

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

# Função de Corrente e Potencial de Velocidade - Laplace

Substituindo  $u$  e  $v$  na condição de irrotacionalidade,

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

resultando

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

# Função de Corrente e Potencial de Velocidade - Laplace

Substituindo  $u$  e  $v$  na equação da continuidade,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

obtém-se

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Funções  $\psi$  ou  $\phi$  que satisfaçam Laplace representarão um campo de escoamento bidimensional, incompressível e irrotacional.

Escoamento bidimensional incompressível pode-se definir função de corrente  $\psi$ , se escoamento for também irrotacional,  $\psi$  satisfará Laplace. Escoamento irrotacional pode-se definir potencial de velocidade  $\phi$ , se escoamento for também incompressível,  $\phi$  satisfará Laplace.

# Ortogonalidade das Linhas de Potencial e de Corrente

A função de corrente  $\psi$  é constante ao longo de qualquer linha de corrente, para  $\psi = cte$ , então  $d\psi = 0$ ,

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = 0$$

a inclinação da linha de corrente

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi} = -\frac{\partial\psi/\partial x}{\partial\psi/\partial y} = -\frac{-v}{u} = \frac{v}{u}$$

Ao longo de uma linha de  $\phi = cte$ , então  $d\phi = 0$ ,

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy = 0$$

a inclinação da linha de potencial

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\phi} = -\frac{\partial\phi/\partial x}{\partial\phi/\partial y} = -\frac{u}{v}$$

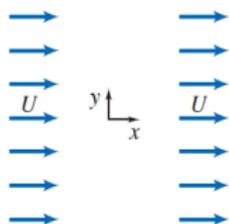
As linhas de  $\psi$  constante e de  $\phi$  constante são ortogonais.

## Escoamento Planos Elementares

A seguir serão apresentadas as funções  $\psi$  e  $\phi$  obtidas do campo de velocidades para um escoamento uniforme, uma fonte, um sumidouro, um vórtice e um dipolo.

# Escoamento Planos Elementares

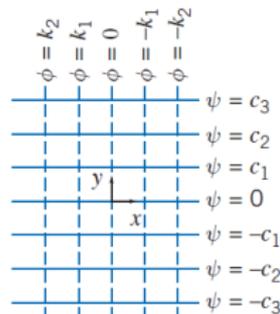
- Escoamento Uniforme



**Uniform Flow (positive x direction)**

$$u = U \quad \psi = Uy$$
$$v = 0 \quad \phi = -Ux$$

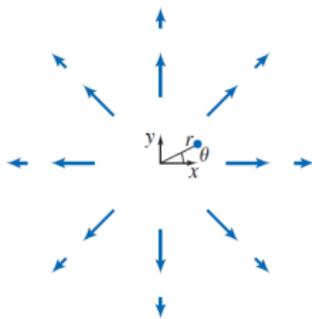
$\Gamma = 0$  around any closed curve



Escoamento uiforme de velocidade constante paralela ao eixo  $x$  satisfazendo a equação da conitnuidade e irrotacionalidade.

# Escoamento Planos Elementares

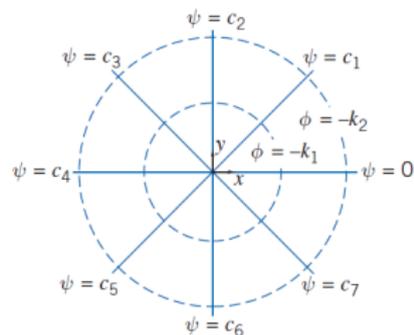
## ● Escoamento de Fonte



**Source Flow (from origin)**

$$V_r = \frac{q}{2\pi r} \quad \psi = \frac{q}{2\pi} \theta$$
$$V_\theta = 0 \quad \phi = -\frac{q}{2\pi} \ln r$$

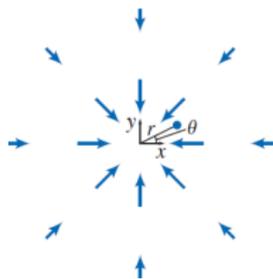
Origin is singular point  
 $q$  is volume flow rate per unit depth  
 $\Gamma = 0$  around any closed curve



Modelo de escoamento no plano  $xy$ , cujo escoamento dá-se radialmente para fora a partir de  $z$  sendo simétrico em todas as direções. Sendo  $q$  intensidade da fonte,  $v_\theta$  velocidade tangencial e  $v_r$  velocidade radial.

# Escoamento Planos Elementares

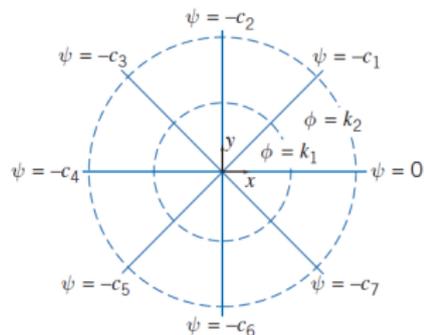
- Escoamento de Sumidouro



### Sink Flow (toward origin)

$$V_r = -\frac{q}{2\pi r} \quad \psi = -\frac{q}{2\pi}\theta$$
$$V_\theta = 0 \quad \phi = \frac{q}{2\pi}\ln r$$

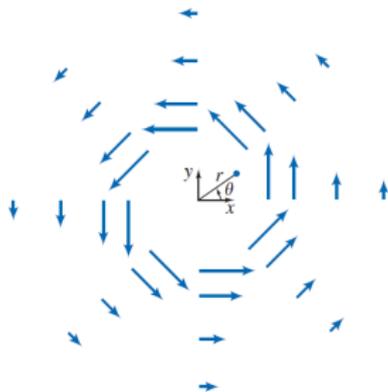
Origin is singular point  
 $q$  is volume flow rate per unit depth  
 $\Gamma = 0$  around any closed curve



Fluxo radial para dentro, denomina-se uma fonte negativa, a velocidade radial aproxima-se do infinito quando o raio aproxima-se de zero.

# Escoamento Planos Elementares

## • Vórtice Irrotacional

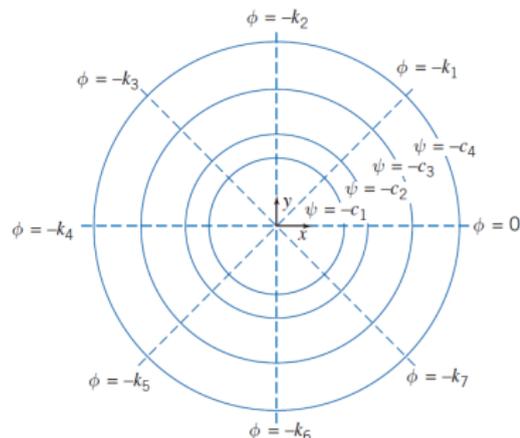


**Irrotational Vortex  
(counterclockwise, center  
at origin)**

$$V_r = 0 \quad \psi = -\frac{K}{2\pi} \ln r$$

$$V_\theta = \frac{K}{2\pi r} \quad \phi = -\frac{K}{2\pi} \theta$$

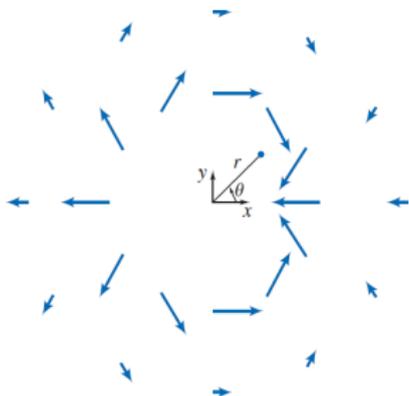
Origin is singular point  
 $K$  is strength of the vortex  
 $\Gamma = K$  around any closed curve  
enclosing origin  
 $\Gamma = 0$  around any closed curve  
not enclosing origin



L.C. são círculos concêntricos formando vórtice, descreve o comportamento de tornados.

# Escoamento Planos Elementares

- Dipolo

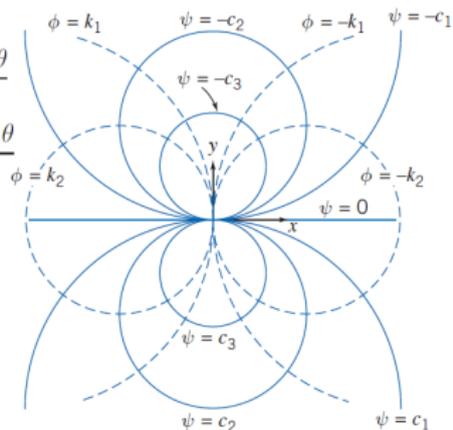


**Doublet (center at origin)**

$$V_r = -\frac{\Lambda}{r^2} \cos \theta \quad \psi = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r}$$

$$V_\theta = -\frac{\Lambda}{r^2} \sin \theta \quad \phi = -\frac{\Lambda \cos \theta}{r}$$

Origin is singular point  
 $\Lambda$  is strength of the doublet  
 $\Gamma$  = around any closed curve

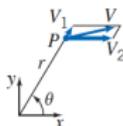


É mescla de uma fonte e um sumidouro de mesma intensidade  $\Lambda$ , a medida que que a distância  $\delta_s$  entre eles se aproxima de zero, suas intensidade aumentam tendendo a infinito.

# Superposição de Escoamentos Planos Elementares

- Fonte e Uniforme

Source and Uniform Flow (flow past a half-body)

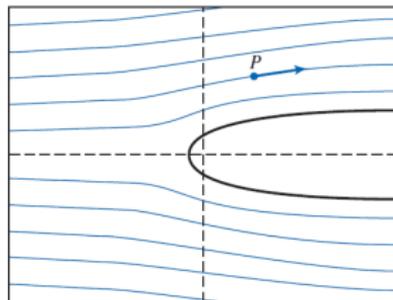


$$\psi = \psi_{so} + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi}\theta + Uy$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi}\theta + Ur \sin \theta$$

$$\phi = \phi_{so} + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi} \ln r - Ux$$

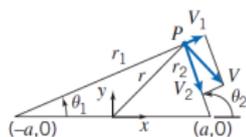
$$\phi = -\frac{q}{2\pi} \ln r - Ur \cos \theta$$



# Superposição de Escoamentos Planos Elementares

- Fonte e Sumidouro

Source and Sink (equal strength, separation distance on  $x$  axis =  $2a$ )

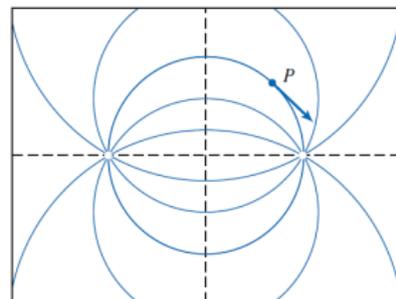


$$\psi = \psi_{so} + \psi_{si} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi} \theta_1 - \frac{q}{2\pi} \theta_2$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2)$$

$$\phi = \phi_{so} + \phi_{si} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi} \ln r_1 + \frac{q}{2\pi} \ln r_2$$

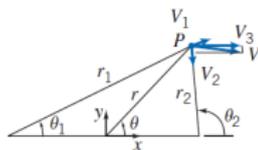
$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$



# Superposição de Escoamentos Planos Elementares

- Fonte, Sumidouro e Uniforme

Source, Sink, and Uniform Flow (flow past a Rankine body)

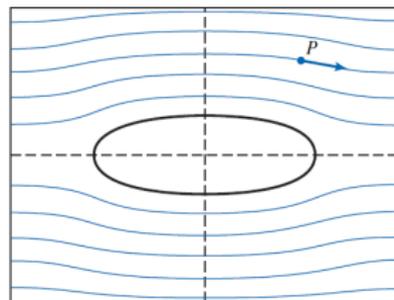


$$\begin{aligned}\psi &= \psi_{so} + \psi_{si} + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 \\ &= \frac{q}{2\pi} \theta_1 - \frac{q}{2\pi} \theta_2 + Uy\end{aligned}$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) + Ur \sin \theta$$

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_{so} + \phi_{si} + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \\ &= -\frac{q}{2\pi} \ln r_1 + \frac{q}{2\pi} \ln r_2 - Ux\end{aligned}$$

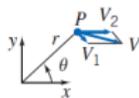
$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} - Ur \cos \theta$$



# Superposição de Escoamentos Planos Elementares

## • Vórtice e Uniforme

Vortex (clockwise) and Uniform Flow

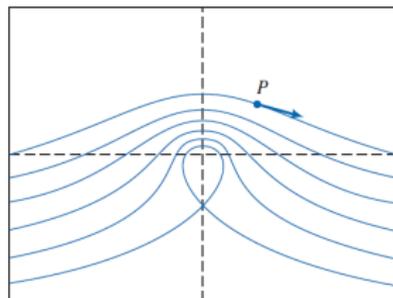


$$\psi = \psi_v + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{K}{2\pi} \ln r + Uy$$

$$\psi = \frac{K}{2\pi} \ln r + Ur \sin \theta$$

$$\phi = \phi_v + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 = \frac{K}{2\pi} \theta - Ux$$

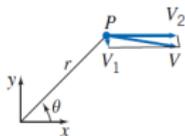
$$\phi = \frac{K}{2\pi} \theta - Ur \cos \theta$$



# Superposição de Escoamentos Planos Elementares

- Dipolo e Uniforme

Doublet and Uniform Flow (flow past a cylinder)



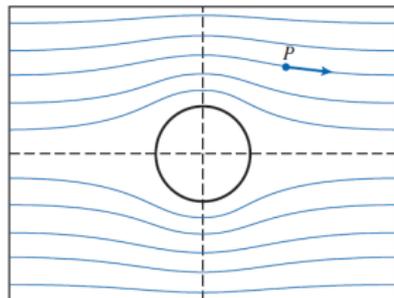
$$\begin{aligned}\psi &= \psi_d + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r} + Uy \\ &= -\frac{\Lambda \sin \theta}{r} + Ur \sin \theta\end{aligned}$$

$$\psi = U \left( r - \frac{\Lambda}{Ur} \right) \sin \theta$$

$$\psi = Ur \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad a = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}}$$

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_d + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{\Lambda \cos \theta}{r} - Ux \\ &= -\frac{\Lambda \cos \theta}{r} - Ur \cos \theta\end{aligned}$$

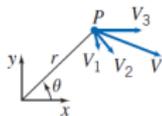
$$\phi = -U \left( r + \frac{\Lambda}{Ur} \right) \cos \theta = -Ur \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta$$



# Superposição de Escoamentos Planos Elementares

- Dipolo, Vórtice e Uniforme

Doublet, Vortex (clockwise), and Uniform Flow (flow past a cylinder with circulation)



$$a = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}}; K < 4\pi aU$$

$$\psi = \psi_d + \psi_v + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$$

$$= -\frac{\Lambda \sin \theta}{r} + \frac{K}{2\pi} \ln r + Uy$$

$$\psi = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r} + \frac{K}{2\pi} \ln r + Ur \sin \theta$$

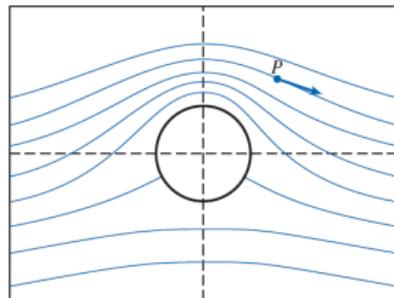
$$\psi = Ur \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{K}{2\pi} \ln r$$

$$\phi = \phi_d + \phi_v + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$

$$= -\frac{\Lambda \cos \theta}{r} + \frac{K}{2\pi} \theta - Ux$$

$$\phi = -\frac{\Lambda \cos \theta}{r} + \frac{K}{2\pi} \theta - Ur \cos \theta$$

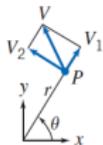
$$\phi = -Ur \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta + \frac{K}{2\pi} \theta$$



# Superposição de Escoamentos Planos Elementares

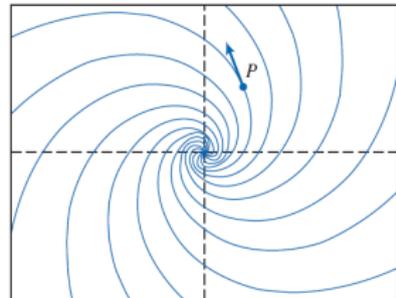
- Fonte e Vórtice

Source and Vortex (spiral vortex)



$$\psi = \psi_{so} + \psi_v = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi}\theta - \frac{K}{2\pi}\ln r$$

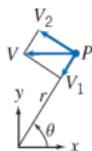
$$\phi = \phi_{so} + \phi_v = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi}\ln r - \frac{K}{2\pi}\theta$$



# Superposição de Escoamentos Planos Elementares

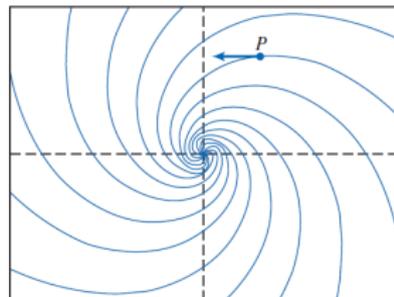
- Sumidouro e Vórtice

Sink and Vortex



$$\psi = \psi_{si} + \psi_v = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{q}{2\pi}\theta - \frac{K}{2\pi}\ln r$$

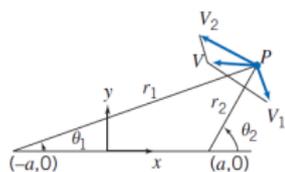
$$\phi = \phi_{si} + \phi_v = \phi_1 + \phi_2 = \frac{q}{2\pi}\ln r - \frac{K}{2\pi}\theta$$



# Superposição de Escoamentos Planos Elementares

- Par de Vórtices

Vortex Pair (equal strength, opposite rotation, separation distance on x axis = 2a)

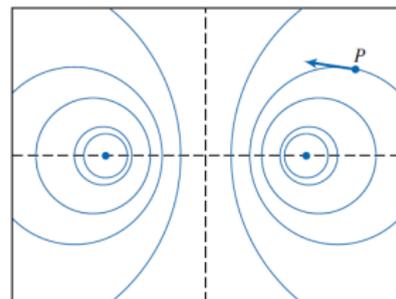


$$\psi = \psi_{v1} + \psi_{v2} = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{K}{2\pi} \ln r_1 + \frac{K}{2\pi} \ln r_2$$

$$\psi = \frac{K}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$\phi = \phi_{v1} + \phi_{v2} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{K}{2\pi} \theta_1 + \frac{K}{2\pi} \theta_2$$

$$\phi = \frac{K}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1)$$



*"Someone's sitting in the shade today because someone planted a tree a long time ago"*

Warren Buffett