Máquinas de Fluxo I

TIPOS DE ESCOAMENTO

R. Sobral

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

rodolfo.sobral@cefet-rj.br

Programa do Curso - Avaliação 01

- Introdução e hipótese do contínuo
- Princípios de conservação e equações do movimento
- Similaridade dinâmica
- Tipos de escoamento
- Funcionamento e performance

Tipos de Escoamento

- **Escoamento irrotacional**
- **Escoamento interno**
- **Escoamento invíscido**
- **Escoamento com atrito* (Δp)**

Escoamento Irrotacional

Escoamentos nos quais as partículas de fluido não possuem rotação $\boldsymbol{w} = 0$.

Tensões de cisalhamento são responsáveis por rotação, escoamentos inviscídos são irrotacionais, a menos que as partículas estejam em rotação inicialmente.

$$rot\boldsymbol{v} = \nabla x \boldsymbol{v} = 0$$

Escoamento Irrotacional

Em coordenadas cartesianas,

$$\left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right] = \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right] = \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right] = 0$$

Em coordenadas cilíndricas,

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right] = \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right] = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] = 0$$

Bernoulli Aplicado a Escoamento Irrotacional

Vale ressaltar que a equação de Bernoulli tem validade apenas para uma mesma linha de corrente, para que haja garantia na aplicação entre dois pontos quaisquer do escoamento deve-se comprovar condição de irrotacionalidade do escoamento.

CEFET/RJ

Bernoulli Aplicado a Escoamento Irrotacional

Reescrevendo a equação de Euler,

$$(\boldsymbol{v}.\nabla)\,\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - g\boldsymbol{k}$$

Utilizando a identidade vetorial,

$$(\boldsymbol{v}.\nabla)\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\nabla\,(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v})$$

Bernoulli Aplicado a Escoamento Irrotacional

Para escoamento irrotacional $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$, portanto

$$\frac{1}{2}\nabla\left(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}\right) = -\frac{\nabla p}{\rho} - g\boldsymbol{k}$$

CEFET/RJ

Bernoulli Aplicado a Escoamento Irrotacional

Considerando deslocamento em campo de escoamento da posição $(\boldsymbol{r})$ para a posição $(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r})$, tomando o produto $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$, tem-se que

$$\frac{1}{2}\nabla\left(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}\right).d\boldsymbol{r} = -\frac{\nabla p}{\rho}.d\boldsymbol{r} - g\boldsymbol{k}.d\boldsymbol{r}$$

portanto,

$$\frac{1}{2}d\left(v^2\right) = -\frac{dp}{\rho} - gdz$$

ou

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}d\left(v^2\right) + gdz = 0$$

Bernoulli Aplicado a Escoamento Irrotacional

Integrando,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = cte$$

como dr foi um deslocamento arbitrário, a equação acima é válida entre dois pontos quaisquer.

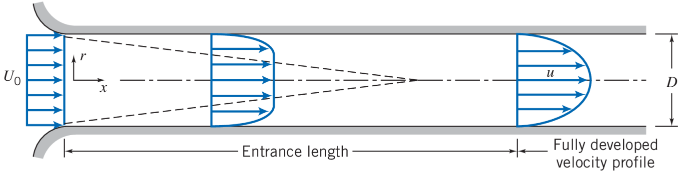
Escoamento em regime permanente, incompressível, viscoso e que seja também irrotacional.

Vídeo 01

Escoamento Interno

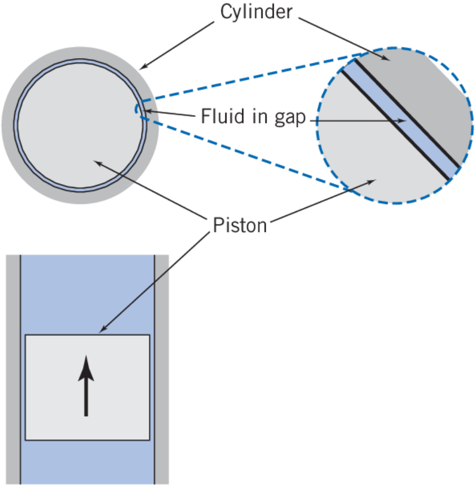
Limitados por superfícies sólidas, em dutos, tubos, bocais, difusores, contrações, expansões, válvulas e acessórios.

Fluxo em um Tubo



Devido a condição de não-deslizamento na parede de tubo, o escoamento laminar de entrada altera seu perfil decorrente a camada limite formada ao longo da parede e condição de velocidade nula. Ressalta-se ainda que, na condição de desenvolvimento completo considera-se perfil de escoamento viscoso em todo o diâmetro de tubo.

Sistema Hidráulico de Alta Pressão - Freio de Automóvel

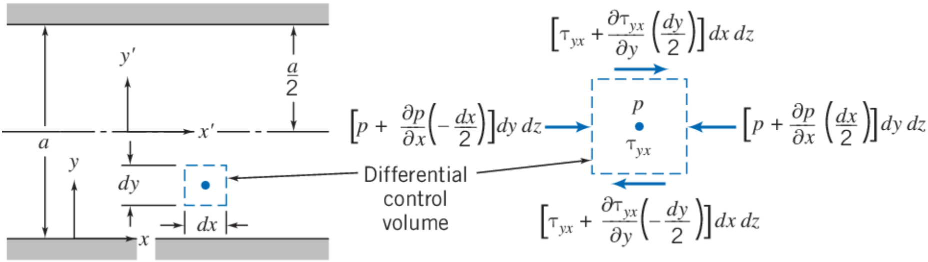


Sabe-se que frequentemente há vazamentos através da folga anular entre um pistão e um cilindro.

CEFET/RJ

Sistema Hidráulico de Alta Pressão - Freio de Automóvel

Para folgas muito pequenas ($< 5.10^{-3} mm$) tal campo pode ser modelado como escoamento entre placas paralelas infinitas.



Condição de contorno de não-deslizamento impõe que: Em $y = 0$, $u = 0$, e em $y = a$, $u = 0$.

Esc. Laminar C.D - Placas Paralelas Infinitas Estacionárias

Para escoamento completamente desenvolvido somente a pressão pode e irá variar na direção de x, caso nítido de Navier-Stokes utilizando C.C. pré-definidas.

Porém, a seguir será proposta solução não-simplificada via análise de volume de controle diferencial.

Esc. Laminar C.D - Placas Paralelas Infinitas Estacionárias

QML na componente x:

$$F_{s_x} + F_{b_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} u\rho dV + \int_{\partial\Omega} u\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{n} dS$$

Para escoamento permanente, C.D. e desprezando-se as forças de corpo, principalmente visto que não há forças de massa atuando na direção x, tem-se que:

$$F_{s_x} = 0$$

- Forças de Pressão - Laterais

$$dF_L = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} \right) dydz$$

$$dF_R = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} \right) dydz$$

- Forças Cisalhantes - Inferior e Superior

$$dF_B = -\left(\tau_{yx} - \frac{d\tau_{yx}}{dy}\frac{dy}{2} \right) dxdz$$

$$dF_T = \left(\tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy}\frac{dy}{2} \right) dxdz$$

Realizando o somatório das forças $F_{s_x} = 0$, tem-se

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d\tau_{yx}}{dy}$$

Válido quando,

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = \frac{\partial p}{\partial x} = cte$$

Integrando,

$$\tau_{yx} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y + c_1$$

Observe que a tensão cisalhante varia linearmente com y

Esc. Laminar C.D - Placas Paralelas Infinitas Estacionárias

Para fluidos newtonianos, a tensão cisalhante varia linearmente com taxa de deformação

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}$$

logo,

$$\mu \frac{du}{dy} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y + c_1$$

Integrando, tem-se o perfil de velocidades

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + \frac{c_1}{\mu} y + c_2$$

Esc. Laminar C.D - Placas Paralelas Infinitas Estacionárias

Utilizando-se as C.C:

- $y = 0 \quad \rightarrow \quad u = 0$
- $y = a \quad \rightarrow \quad u = 0$

Então,

$$0 = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)a^2 + \frac{c_1}{\mu}a$$

logo

$$c_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)a$$

Finalmente, perfil de velocidades é descrito como

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)y^2 - \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)ay = \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)\right]$$

CEFET/RJ

- Tensão de Cisalhamento

$$\tau_{yx} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y + c_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) a = a\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{y}{a} - \frac{1}{2}\right]$$

- Vazão Volumétrica

$$Q = \int_S \boldsymbol{v}\boldsymbol{n} dS$$

Para profundidade l na direção z

$$Q = \int_0^a ul\, dy \qquad \text{ou} \qquad \frac{Q}{l} = \int_0^a \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(y^2 - ay\right) dy$$

Então, a vazão volumétrica por unidade de profundidade é

$$\frac{Q}{l} = -\frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) a^3$$

Esc. Laminar C.D - Placas Paralelas Infinitas Estacionárias

- Vazão Volumétrica em função da queda de Pressão

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{L} = -\frac{\Delta p}{L}$$

Substituindo na expressão para vazão volumétrica

$$\frac{Q}{l} = -\frac{1}{12\mu}\left[-\frac{\Delta p}{L}\right] a^3 = \frac{a^3 \Delta p}{12\mu L}$$

- Velocidade Média

$$\overline{v} = \frac{Q}{A} = -\frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\frac{a^3 l}{la} = -\frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) a^2$$

CEFET/RJ

Esc. Laminar C.D - Placas Paralelas Infinitas Estacionárias

- Velocidade Máxima

$$\frac{du}{dy} = \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{2y}{a^2} - \frac{1}{a}\right]$$

Então,

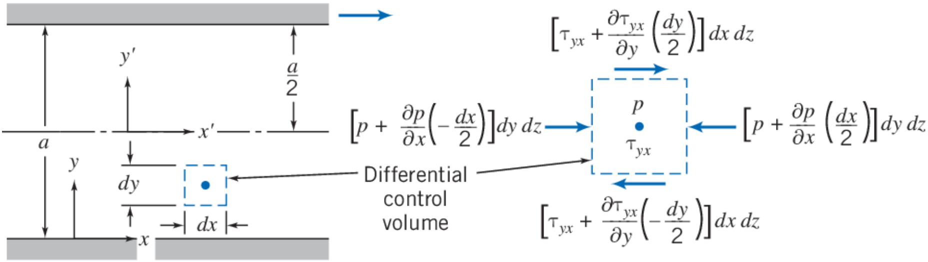
$$\frac{du}{dy} = 0 \qquad \text{em} \qquad y = \frac{a}{2}$$

Em

$$y = \frac{a}{2}, \qquad u = u_{\text{máx}} = -\frac{1}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) a^2 = \frac{3}{2}\overline{V}$$

CEFET/RJ

Esc. Laminar C.D - Placa Superior com Velocidade U



Condições de contorno: Em $y = 0$, $u = 0$, e em $y = a$, $u = U$.

Esc. Laminar C.D - Placa Superior com Velocidade U

Nesta nova situação as C.C. são:

- $y = 0 \quad \rightarrow \quad u = 0$
- $y = a \quad \rightarrow \quad u = U$

Portanto, o perfil de velocidades é descrito como

$$u = \frac{Uy}{a} + \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)\right]$$

Esc. Laminar C.D - Placa Superior com Velocidade U

- Tensão de Cisalhamento

$$\tau_{yx} = \mu\frac{U}{a} + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{2y}{a^2} - \frac{1}{a}\right] = \mu\frac{U}{a} + a\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{y}{a} - \frac{1}{2}\right]$$

- Vazão Volumétrica

$$Q = \int_S \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}dS$$

Para profundidade l na direção z

$$Q = \int_0^a ul\,dy \qquad \text{ou} \qquad \frac{Q}{l} = \int_0^a \left[\frac{Uy}{a} + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(y^2 - ay\right)\right] dy$$

Então, a vazão volumétrica por unidade de profundidade é

$$\frac{Q}{l} = \frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) a^3$$

Esc. Laminar C.D - Placa Superior com Velocidade U

- Velocidade Média

$$\overline{v} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{a}\left[\frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)a^3\right] = \frac{U}{2} - \frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)a^2$$

- Velocidade Máxima

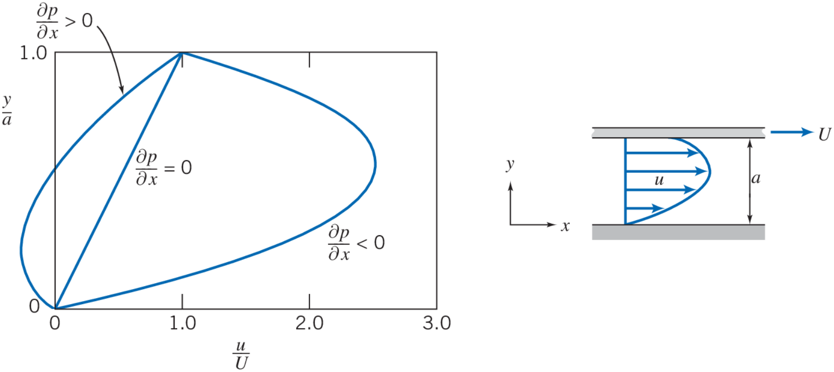
$$\frac{du}{dy} = \frac{U}{a} + \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{2y}{a^2} - \frac{1}{a}\right] = \frac{U}{a} + \frac{a}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[2\left(\frac{y}{a}\right) - 1\right]$$

Então,

$$\frac{du}{dy} = 0 \qquad \text{em} \qquad y = \frac{a}{2} - \frac{U/a}{(1/\mu)(\partial p/\partial x)}$$

CEFET/RJ

Esc. Laminar C.D - Placa Superior com Velocidade U



Perfil de velocidade adimensional para esc. laminar C.D entre placas paralelas infinitas com placa superior movendo-se com vel. constante U

Equação de Bernoulli - Equação da Energia

A primeira lei da termodinâmica se reduz a:

$$\dot{Q} = \left(u_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) (-\rho_1 v_1 A_1) + \left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) (\rho_2 v_2 A_2)$$

Vide equação da continuidade,

$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

e

$$\dot{Q} = \frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta Q}{dm} \frac{dm}{dt} = \frac{\delta Q}{dm} \dot{m}$$

Equação de Bernoulli - Equação da Energia

Portanto,

$$\left(\frac{\delta Q}{dm}\right)\dot{m} = \left[-\left(u_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1}\right) + \left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2}\right)\right]\dot{m}$$

dividindo por $\dot{m}$,

$$\left(u_1 - u_2 + \frac{\delta Q}{dm}\right) = \left[-\left(\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1}\right) + \left(\frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2}\right)\right]$$

Para escoamento incompressível,

$$\left(u_1 - u_2 + \frac{\delta Q}{dm}\right) = \left[-\left(\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho}\right) + \left(\frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}\right)\right]$$

daí,

$$\left(\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho}\right) = \left(\frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}\right) + \left(u_2 - u_1 - \frac{\delta Q}{dm}\right)$$

Equação de Bernoulli - Equação da Energia

Considerando,

$$\left(u_2 - u_1 - \frac{\delta Q}{dm}\right) = 0$$

tem-se que

$$\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}$$

logo,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = cte$$

Linha de Energia e Piezométrica

Como apresentado a priori, para escoamento permanente, incompressível sem atrito ao longo de uma linha de corrente tem-se que a energia mecânica se conserva.

Linha de Energia e Piezométrica

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = H = cte$$

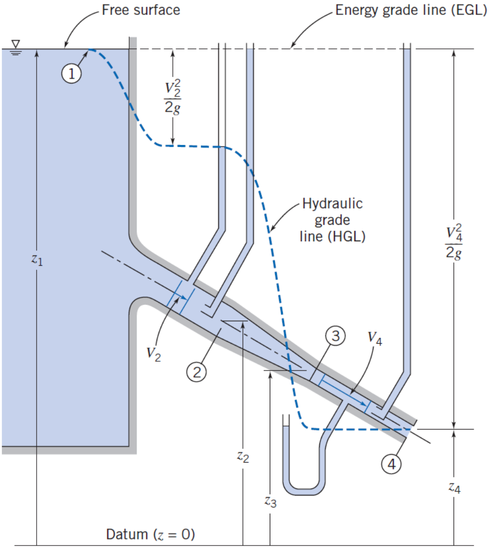
- $\frac{p}{\rho g} \quad \rightarrow \quad$ altura de carga devido à pressão estática local, ou seja, energia de pressão por unidade de peso;
- $\frac{v^2}{2g} \quad \rightarrow \quad$ altura de carga devido à pressão dinâmica local, ou seja, energia de cinética por unidade de peso;
- $z \quad \rightarrow \quad$ altura de carga de elevação, ou seja, energia potencial por unidade de peso;
- $H \quad \rightarrow \quad$ altura de carga total do escoamento, ou seja, energia mecânica total por unidade de peso do fluido em escoamento.

Linha de Energia e Piezométrica

- Linha de energia $\quad \rightarrow \quad$ representa a altura de carga total;
- Linha piezométrica $\quad \rightarrow \quad$ representa a soma das alturas de carga devido à elevação/pressão hidrostática e à pressão estática $(z + p/\rho g)$.

CEFET/RJ

Linha de Energia e Piezométrica - Escoamento Sem Atrito



"Há uma força motriz mais poderosa que o vapor, eletricidade e energia atômica: a vontade"

Albert Einstein